UNIVERSITETET I TRONDHEIM, NTH,
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Eksamen i
fag 71565 Innføring i kvantemekanikk
Lørdag 13. januar 1979
kl. 0900 - 1600

Tillatte hjelpemidler: Regnestav/lommekalkulator,
K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a. La $\Psi(\vec{r},t)$ være bølgefunksjonen til en partikkel med masse m i potensialet $V(\vec{r})$. Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likningen for Ψ .

b. Anta at Hamiltonoperatørens egenverdier E_n og egenfunksjoner $\psi_n(\vec{r})$ er kjente; egenfunksjonene antas danne et fullstendig sett. Vis at den alminnelige løsning $\Psi(\vec{r},t)$ av den tids-avhengige Schrödingerlikning kan skrives på formen

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} .$$

Hvordan bestemmes c_n når begynnelsestilstanden $\Psi(\vec{r},0)$ er kjent?

c. En partikkel i et éndimensjonalt harmonisk oscillatorpotensial

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 ,$$

er begrenset til å bevege seg på høyre side av origo p.g.a. en ugjennomtrengelig vegg ved $q=0$. (Fig.1a).

Bestem egenfunksjonene $\varphi_n(x)$ og de tilhørende egenverdier i dette "halve oscillator-potensial".

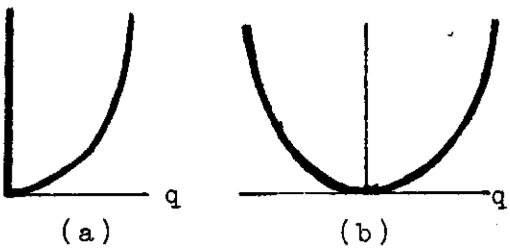

Fig.1. Potensialet for $t<0$ (a) og for $t>0$ (b).

d. Partikkelen befinner seg i grunntilstanden i ovennevnte potensial. Ved tidspunktet $t=0$ fjernes plutselig veggen ved $q=0$, så raskt at bølgefunksjonen ikke endrer form under prosessen.
Bestem for $t>0$ sannsynlighetene p_0 og p_1 for å finne partikkelen henholdsvis i grunntilstanden og i første eksiterte tilstand i det symmetriske oscillatorpotensial (Fig.1b).

e. Ved senere tidspunkt $T_N = N/\omega$, der N er et naturlig tall, er partikkelen med sikkerhet tilbake i høyre halvdel $(q>0)$. Vis det.

f. Se på partikkelen i det symmetriske oscillatorpotensial igjen, denne gang med bølgefunksjonen

$$\Psi(q,0) = (m\omega/4\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}(1+q\sqrt{2m\omega/\hbar})e^{-\frac{1}{2}m\omega q^2/\hbar}$$

ved $t=0$. Beregn partikkelens midlere energi, posisjon og impuls ved tida t.

Oppgitt: Se vedlegg.

Oppgave 2

a. Utled uttrykket for perturbasjonen av et ikke degenerert energinivå E_n^0 til første orden i λ når den tidsuavhengige Hamiltonoperatoren er $H = H_0 + \lambda V$ og løsningene av det uperturberte egenverdiproblem

$$H_0|n\rangle = E_n^0|n\rangle$$

antas kjente.

b. Bestem egenverdiene E_n^0 og egenfunksjonene $\psi_n(x)$ til en partikkel i en éndimensjonal boks $0 \leq x \leq L$ med ugjennomtrengelige vegger i $x=0$ og $x=L$.

c. Partikkelen i boksen påvirkes av en svak kraft mot venstre, representert ved oscillatorpotensialet

$$V(x) = \lambda x^2 \quad .$$

Bruk første ordens perturbasjonsteori til å finne hvorledes energinivåene perturberes av oscillatorpotensialet.

Oppgave 3

a. La $F(\vec{p},\vec{r})$ være en dynamisk variabel som ikke avhenger eksplisitt av tida. Vis at den kvantemekaniske forventningsverdi $\langle F\rangle$ av F i en vilkårlig tilstand $\Psi(\vec{r},t)$ oppfyller bevegelseslikningen

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,F]\rangle \quad ,$$

der H er systemets Hamiltonoperator. Hva er betingelsen for at F er en bevegelseskonstant?

b. Benytt dette til å beregne middelimpulsen $\langle\vec{p}\rangle_t$ og middelposisjonen $\langle\vec{r}\rangle_t$ ved tida t, for en partikkel med masse m i tyngdefeltet,

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + mgz \quad .$$

Middelimpulsen $\langle\vec{p}\rangle_0$ og middelposisjonen $\langle\vec{r}\rangle_0$ ved $t=0$ forutsettes kjent.

1. Oscillatorbølgefunksjonene

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-m\omega q^2/2\hbar}\, H_n(q\sqrt{m\omega/\hbar})$$

2. Hermite-polynomer

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2-2 \quad , \quad \text{osv.}$$

Rottmanns definisjon av Hermite-polynomer avviker fra dette.

3. Integraler

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{2} \cdots\cdots \frac{2n-1}{2} \quad , \quad n=1,2,\ldots.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad .$$