Eksamen i
fag 715 65 Innføring i kvantemekanikk
Lørdag 12. januar 1980
kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: Regnestav/lommekalkulator
K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave 1

a. Skriv ned den tidsavhengige Schrödingerlikning for en partikkel med masse m i et potensial $V(\vec{r})$.

b. Anta at Hamiltonoperatorens egenverdier E_n og egenfunksjoner $\psi_n(\vec{r})$ er kjente. Egenverdiene danner et diskret spektrum og egenfunksjonene antas danne et fullstendig sett. Vis at den alminnelige løsning $\Psi(\vec{r},t)$ av den tidsavhengige Schrödingerlikning kan skrives på formen,

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

Hvorledes bestemmes koeffisientene c_n når begynnelsestilstanden $\Psi(\vec{r},0)$ er kjent? Forklar hvorledes fullstendighetsrelasjonen for funksjonssettet $\psi_n(\vec{r})$ fremkommer.

c. En partikkel i et éndimensjonalt harmonisk oscillatorpotensial,

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2 ,$$

har ved $t=0$ bølgefunksjonen

$$\Psi(q,0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-m\omega(q-a)^2/2\hbar}$$

Vis at sannsynligheten for å finne partikkelen med energi $E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$, $n=0,1,2,\ldots$, er lik

$$p_n = \alpha^n e^{-\alpha}/n! \quad , \quad \text{der} \quad \alpha = \tfrac{1}{2} m\omega a^2/\hbar .$$

d. Beregn sannsynligheten $P(q,t)dq$ for å finne partikkelen med posisjon i $(q,q+dq)$ ved tiden t .

e. Skissér to måter å beregne partikkelens middelenergi på. Gjennomfør én av dem.

Oppgave 2

a. Et system med en tidsuavhengig Hamiltonoperator H^0 og egenfunksjoner

$$\Psi_n^0(\vec{r},t) = \psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar} \quad ,$$

utsettes for en tidsavhengig perturbasjon $V(r,t)$ slik at den totale Hamiltonoperator er $H=H^0+V$.

Utvikle den eksakte bølgefunksjon $\Psi(\vec{r},t)$ i egenfunksjonene for det uperturberte system:

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k a_k(t)\Psi_n^0(\vec{r},t) \quad ,$$

og vis at for svake perturbasjoner gjelder til laveste orden:

$$a_n(t) = a_n(0) + \frac{1}{i\hbar}\sum_k a_k(0)\int_0^t d\tau V_{nk}(\tau)e^{i\tau(E_n-E_k)/\hbar} \quad ,$$

der

$$V_{nk}(\tau) = \int d^3r\psi_n^*(\vec{r})V(\vec{r},\tau)\psi_k(\vec{r}) \quad .$$

b. Et hydrogenatom utsettes for et svakt transient homogent elektrisk felt, tilsvarende perturbasjonen

$$V(\vec{r},t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -ze\mathcal{E}_0 tT^{-1}e^{-t/T} & t \geq 0 \end{cases} \quad .$$

Atomet er i grunntilstanden for $t \leq 0$. Beregn laveste ordens sannsynlighet for at atomet vil være i en 2p-tilstand ved $t=\infty$.

1. Normerte oscillatorbølgefunksjoner

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega q^2/2\hbar} H_n(q\sqrt{m\omega/\hbar}) \quad ,$$

der $H_n(x)$ er et Hermite-polynom, f.eks. definert ved $H_n(x)=e^{x^2}(-\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$. (Rottmanns definisjon av Hermite-polynomer avviker fra dette).

2. Den genererende funksjon for Hermite-polynomene

$$S(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{s^n}{n!} = e^{-s^2+2xs}$$

3. Integraler

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-bx^2+cx} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\ e^{c^2/4b}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-bx^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ b^{-3/2}$$

4. Normerte hydrogenbølgefunksjoner

Grunntilstanden:

$$\psi_{100} = (\pi a^3)^{-\frac{1}{2}}\ e^{-r/a}$$

2p-tilstandene:

$$\psi_{210} = (32\pi a^5)^{-\frac{1}{2}} e^{-r/2a} r\cos\vartheta$$

$$\psi_{21\pm1} = (64\pi a^5)^{-\frac{1}{2}} e^{-r/2a} r\sin\vartheta\ e^{\pm i\varphi}$$

der a er Bohr-radien. De tilsvarende energier er

$$E_{n\ell m} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{n^2} \quad .$$