Kontinuasjonseksamen i

fag 715 65 Innføring i kvantemekanikk

Lørdag 22.august 1981
kl0900-1500

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Regnestav/lommekalkulator.

Oppgave 1

a) La $\psi(\vec{r},t)$ være bølgefunksjonen til en partikkel med masse m i potensialet $V(\vec{r})$. Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likningen for $\psi(\vec{r},t)$. Hvordan finner en forventningsverdien av en observerbar størrelse $F(\vec{r},\vec{p},t)$ i en gitt tilstand ?

b) Hamiltons bevegelseslikninger for en klassisk partikkel lyder

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \quad \text{og} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla V$$

Ehrenfests teorem sier at forventningsverdiene av posisjon, impuls og kraft oppfyller tilsvarende likninger. Vis dette for en en-dimensjonal bevegelse.

Oppgave 2

a) Redegjør for hvordan en vilkårlig tilstand $|\psi\rangle$ kan utvikles i et sett egenfunksjoner $|n\rangle$.

b) Vis at i energirepresentasjonen $|n\rangle$ blir Hamiltonmatrisen $H'=\langle n|H|n\rangle$ diagonal og at sammenhengen mellom denne matrisen og H-matrisen i en vilkårlig representasjon $|k\rangle=\sum_n|n\rangle\langle n|k\rangle$ kan skrives på formen $H'=S^{-1}HS$.

c) For et system med hamiltonfunksjon H_0 har nivået med energi E_a degenerasjonsgraden 3. Videre i oppgaven benytter vi bare disse 3 tilstandene. Skriv opp representasjonsmatrisen for H_0 når en som basis bruker disse 3 egentilstandene.

d) Systemets hamiltonfunksjon får så et tilleggsledd H_1 som i representasjonen ovenfor har formen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & V & V \\ V & 0 & V \\ V & V & 0 \end{pmatrix}$$

Finn energi-egenverdiene for det nye systemet med $H = H_0 + H_1$.

Oppgave 3

a) Bevis at hvis to operatorer kommuterer så kan man finne et felles sett egenfunksjoner for dem.

b) Et elektron er bundet til origo med potensialet $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Dessuten er det en kobling mellom elektronets spinn $\vec{S}$ og banebevegelse $\vec{L}$ gitt ved

$$H' = a \frac{\omega}{\hbar} S_z L_z \qquad (a = \text{konstant}) \; .$$

Vis at L og L_z kommuterer med Hamiltonoperatoren for elektronet og finn energinivåene for systemet. Angi nivåenes kvantetall og bestem degenerasjonen.

Oppgitt:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2} \; .$$