Eksamen i

Fag 71565 Innføring i kvantemekanikk

Torsdag 22.januar 1981
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Regnestav, lommekalkulator
K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a) En partikkel befinner seg i en endimensjonal boks definert som intervallet $0 \leq x \leq L$.
Finn systemets egenfunksjoner og energiegenverdier.

b) Et elektron kan bevege seg fritt inne i et lineært molekyl av lengde L . Molekylets tykkelse er ubetydelig. I grunntilstanden har elektronet bølgefunksjonen

$$\Psi_L(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} e^{-\frac{i}{\hbar} E_L t}$$

Bestem E_L .

Ved $t=0$ blir det raskt kuttet av en bit slik at det nye molekylets lengde bare blir ℓ .

i) Hva er sannsynligheten P_ℓ for at elektronet nå skal være i dette nye molekylet?

ii) Hva er energiegentilstandene $\phi_n(x)$ $(n=1,2,3...)$ og energiegenverdiene for elektronet i dette nye molekylet?

iii) Finn sannsynligheten P_n for at elektronet for $t>0$ skal befinne seg i egentilstand $\phi_n(x)$.

iv) Anta $\ell=\frac{1}{2}L$ og finn bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ for $t>0$ utviklet etter egenfunksjonene $\phi_n(x)$.

Oppgave 2

a) Bevis at hvis to operatorer kommuterer så kan man finne et felles sett egenfunksjoner for dem. (Anta at man ikke har degenerasjon).

b) Undersøk, for en fri ikke-relativistisk partikkel, kommuteringsforholdene mellom operatorene for fri energi, impuls og paritet. Finn de mulige sett av samtidige egenfunksjoner for to eller tre av disse operatorene.

c) Finn en sammenheng mellom uskarphetsproduktet og kommutatoren for to observable.
Oppgitt: Schwartz ulikhet

$$\int |f|^2 dq \cdot \int |g|^2 dq \geq \left| \int f^* g \, dq \right|^2$$

Oppgave 3

a) Redegjør for hvordan en vilkårlig tilstand $|\psi\rangle$ kan utvikles i et sett egenfunksjoner $|n\rangle$.

b) Vis at i energirepresentasjonen $|n\rangle$ blir Hamilton-matrisen $H' = \langle n|H|n\rangle$ diagonal og at sammenhengen mellom denne matrisen og H-matrisen i en vilkårlig representasjon $|k\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|k\rangle$ kan skrives på formen $H' = S^{-1}HS$.

c) Et elektron i et ytre magnetfelt langs z-aksen har energioperator: $H_0 = M\sigma_z$ M=konstant.
Hva blir systemets energi-egenverdier?
Det adderes så til en liten feltkomponent langs x-aksen slik at Hamiltonoperatoren blir
$H = M\sigma_z + J\sigma_x$ J=konstant
Hva blir nå energiegenverdiene?

Oppgitt: Pauli-matrisene er

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$