UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor P.C.Hemmer
Tlf. (9)3648

Eksamen i

fag 71565 Innføring i kvantemekanikk
lørdag 30.januar 1982
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Regnestav/lommekalkulator.

## Oppgave 1

a. La $\psi(\vec{r},t)$ være bølgefunksjonen til en partikkel med masse $m$ i potensialet $V(\vec{r})$. Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likningen for $\psi$. Hva er en stasjonær tilstand ?

b. Vis at for en partikkel i det éndimensjonale oscillatorpotensial

$$V(q) = \tfrac{1}{2}\, m\omega^2 q^2$$

er

$$\psi_0(q) = (m\omega/\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}\, e^{-m\omega q^2/2\hbar}$$

en normert energiegenfunksjon med egenverdi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (grunn-tilstanden).

c. Vis at samtlige energiegentilstander $\psi_n(q)$ i ovenstående oscillator-potensial har bestemt paritet.

d. En partikkel i ovenstående oscillatorpotensial har ved tidspunktet $t=0$ bølgefunksjonen

$$\psi(q,0) = (4m\omega/\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}\, e^{-2m\omega q^2/\hbar} \quad ,$$

og det foretas en måling av partikkelens energi. Hva er sannsynlighetene $p, \tilde{p}$ og $\hat{p}$ for å finne henholdsvis energiverdiene $\frac{1}{2}\hbar\omega$, $\hbar\omega$ og $\frac{3}{2}\hbar\omega$ ?

Oppgave 2

a. La $F(\vec{p},\vec{r})$ være en dynamisk variabel som ikke avhenger eksplisitt av tida. Vis at den kvantemekaniske forventningsverdi $\langle F\rangle$ av $F$ i en vilkårlig tilstand $\psi(\vec{r},t)$ oppfyller

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,F]\rangle \quad ,$$

der $H$ er systemets Hamiltonoperator.

b. Bruk dette til å vise at middelposisjonen $\langle q\rangle$ for en harmonisk oscillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad ,$$

oppfyller bevegelseslikningen

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle q\rangle + \omega^2\langle q\rangle = 0 \ .$$

Oppgave 3

a. La $E_0$ være grunntilstandsenergien til en partikkel i et éndimensjonalt potensial $V(x)$ og la

$$E[f] = \frac{\int dx\ f^*(x)H\ f(x)}{\int dx\ f^*(x)\ f(x)}$$

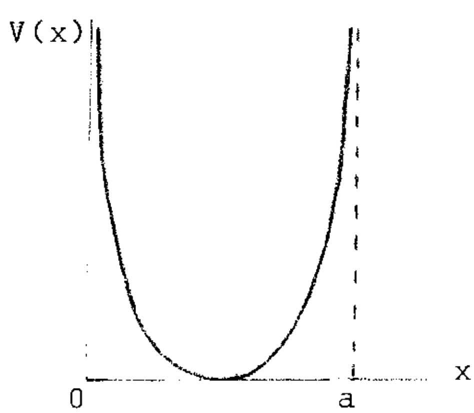
være Rayleigh-Ritz estimatet for grunntilstandsenergien som en normerbar funksjon $f(x)$ gir. $H$ er hamiltonoperatoren.
Vis at

$$E_0 \leq E[f] \ ,$$

og at likhet oppnås hvis og bare hvis $f(x)$ er den eksakte grunntilstand.

b. En partikkel med masse $m=1$ beveger seg i det sterkt anharmoniske éndimensjonale potensial $(0<x<a)$

$$V(x) = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\cot^2\frac{\pi x}{a} \ .$$




Benytt prøvefunksjonen

$$\tilde{f}(x) = \sin\frac{\pi x}{a}$$

til å oppnå et Rayleigh-Ritz estimat $\tilde{E}_0$ for grunntilstandsenergien.

c. Benytt nå en annen prøvefunksjon,

$$\hat{f}(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{a}$$

til å finne et nytt Rayleigh-Ritz estimat $\hat{E}_0$ for $E_0$ .
Hvilken av de to prøvefunksjoner gir det beste resultat ?

d. Hvilken differensiallikning tilfredstiller den eksakte grunntilstand $\psi_0$ ? Vis at $\hat{f}(x)$ er en eksakt egentilstand (unormert) for denne oscillatoren.

Oppgitt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$$

$$\int_0^{\pi} dx\ \sin^{2n} x = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \qquad (\ n\ \text{ positivt heltall})$$