Eksamen 30.1.1982, Innføring i kvantemekanikk

$\boxed{\text{LØSNINGSSKISSE}}$

Oppgave 1

a. Som forelesn.

b. Verifikasjon ved innsetting i $-\frac{\hbar}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\omega^2\psi = E\psi$.

c. Da paritetsoperatoren kommuterer med H, og oscillatortilstandene ikke er degenerert følger påstanden. (Eksplisitt verifikasjon vha $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ er naturligvis også mulig).

d. Måleresultatene er energiegenverdiene $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$, med sannsynligheter $p_n = |c_n|^2$ gitt ved egenfunksjonsutviklingen av $\psi(q,0)$:

$$\psi(q,0) = \sum_n c_n \psi_n(q).$$

Her er

$$c_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \psi(q,0)\psi_0(q) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\ e^{-5m\omega q^2/2\hbar}$$

$$= \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{5m\omega}} = \underline{\sqrt{\frac{4}{5}}},$$

og

$$c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \psi(q,0)\psi_1(q) = \underline{0}, \text{ da}$$

$\psi(q,0)$ har like, $\psi_1(q)$ ulike paritet.

Da $\frac{1}{2}\hbar\omega = E_0$, $\hbar\omega$ ikke egenverdi, $\frac{3}{2}\hbar\omega = E_1$ får

$p = \frac{4}{5}$
$\tilde{p} = 0$
$\hat{p} = 0$

Oppgave 2

a. Som forelesn.

b. $$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}\langle[q^2, p]\rangle = -\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{i}\langle 2q\rangle = -m\omega^2\langle q\rangle$$

$$\frac{d\langle q\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\langle[p^2, q]\rangle = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\frac{\hbar}{i}\langle 2p\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle$$

gir påstanden ved eliminasjon av $\langle p\rangle$.

Oppgave 3

a. Som forelesn. (med hvis og bare hvis)

b. Ved en delvis integrasjon i det kinetiske ledd har vi i dette tilfelle ($f(0) = f(a) = 0$):

$$E[f] = \frac{\int_0^a \frac{\hbar^2}{2}[f'(x)]^2 dx + \int_0^a \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} \cot^2\frac{\pi x}{a} |f(x)|^2 dx}{\int_0^a dx\, |f(x)|^2}$$

Med $f = \tilde{f}(x) = \sin\frac{\pi x}{a}$ fås

$$\tilde{E}_0 = \frac{\frac{\hbar^2\pi^2}{2a^2}\int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{a}\, dx + \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\int_0^a dx\, \cos^2\frac{\pi x}{a}\, dx}{\int_0^a dx\, \sin^2\frac{\pi x}{a}} = \underline{\underline{\frac{3\pi^2\hbar^2}{2a^2}}}$$

c. Med $f = \hat{f} = \sin^2\frac{\pi x}{a}$ fås

$$\hat{E}_0 = \frac{\frac{2\hbar^2\pi^2}{a^2}\int_0^a dx\, \sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\int_0^a dx\, \sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}}{\int_0^a dx\, \sin^4\frac{\pi x}{a}}$$

$$= \frac{3\pi^2\hbar^2}{a^2} \frac{\int_0^\pi dy\, \sin^2 y \cos^2 y}{\int_0^\pi dy\, \sin^4 y}$$

Da $\int_0^\pi dy\, \sin^2 y \cos^2 y = \frac{1}{4}\int_0^\pi dy\, \sin^2 2y = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} dz\, \sin^2 z = \underline{\frac{\pi}{8}}$

og $\int_0^\pi dy\, \sin^4 y = \int_0^\pi dy\, \sin^2 y - \int_0^\pi dy\, \sin^2 y \cos^2 y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \underline{\frac{3\pi}{8}}$

fås

$$\hat{E}_0 = \underline{\underline{\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}}}$$

Da $\hat{E}_0 < \tilde{E}_0$ er $\hat{E}_0$ det beste estimat.

d. ψ_0 tilfredsstiller Schrödinger-likningen $H\psi_0 = E_0\psi_0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\psi_0'' + \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\cot^2\frac{\pi x}{a}\,\psi_0 = E_0\,\psi_0,$$

der E_0 er ukjent.

Med $\hat{\psi}_0 = \sin^2\frac{\pi x}{a}$ er

$$\hat{\psi}_0' = \frac{2\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}$$

$$\hat{\psi}_0'' = \frac{2\pi^2}{a^2}\cos\frac{2\pi x}{a}, \quad \text{og}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\hat{\psi}_0'' + \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\cot^2\frac{\pi x}{a}\,\hat{\psi}_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\left[-\cos\frac{2\pi x}{a} + \cos^2\frac{\pi x}{a}\right]$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\left[-\cos^2\frac{\pi x}{a} + \sin^2\frac{\pi x}{a} + \cos^2\frac{\pi x}{a}\right]$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\hat{\psi}_0$$

Altså er $\hat{\psi}_0$ en eksakt egentilstand.