UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman.F.Bakke
Tlf. 3649

Kontinuasjonseksamen i
fag 71565 Innføring i kvantemekanikk

lørdag 13.august 1983
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Regnestav/Lommekalkulator

Oppgave 1

a) En partikkel med masse m beveger seg i et potensial $V(\vec{r})$. Sett opp Schrödingerlikningen for partikkelen. Hvordan finner en middelverdien av en observerbar størrelse $F(\vec{r},\vec{p},t)$ i en gitt tilstand?

b) Vis at tidsvariasjonen av en slik middelverdi $\langle F\rangle$ er gitt ved

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,F]\rangle + \langle\frac{\partial F}{\partial t}\rangle$$

c) Benytt dette til å beregne middelimpulsen $\langle\vec{p}\rangle_t$ og middelposisjonen $\langle\vec{r}\rangle_t$ ved tiden t, for en partikkel med masse m i tyngdefeltet,

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + mgz$$

Middelimpulsen $\langle\vec{p}\rangle_0$ og middelposisjonen $\langle\vec{r}\rangle_0$ ved $t=0$ forutsettes kjent.

Oppgave 2

a) Hva vil det si at en operator er hermitesk?
Vis at selv om en operator F ikke er hermitesk så er $F+F^+$ og $i(F-F^+)$ det. (F^+ er den adjungerte til F).

b) Vis at hermiteske operatorer alltid har reelle egenverdier og at verdien av den tilhørende fysiske størrelsen er helt skarp i egentilstandene.

c) En vilkårlig tilstand kan utvikles etter egentilstander for en operator F

$$\psi = \Sigma\, c_n \psi_n \quad \text{med} \quad F\psi_n = f_n \psi_n \qquad (f_n = \text{tall})$$

Beregn middelverdien av F i denne tilstanden og gi en fysisk tolkning av utviklingskoeffisientene c_n .

Oppgave 3

a) Skriv opp den stasjonære Schrödingerlikningen for en partikkel med energi E i det endimensjonale potensialet

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{Cosh}^2 \frac{x}{a}} \qquad (V_0,\ a = \text{konstanter})$$

og vis at den kan omskrives til formen

$$\left(q(1+q)\frac{d^2}{dq^2} + (\tfrac{1}{2}+q)\frac{d}{dq} + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\,\frac{\nu}{1+q}\right)\psi(q) = 0$$

med $\varepsilon = \dfrac{2ma^2E}{\hbar^2}$ og $\nu = \dfrac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$

ved å innføre en ny variabel

$$q = \operatorname{Sinh}^2\frac{x}{a}$$

b) Spalt av en faktor $\psi(q) = (1+q)^\lambda\, u(q)$ og bestem λ slik at $u(q)$ oppfyller likningen

$$q(1+q)u'' + ((2\lambda+1)q + \tfrac{1}{2})u' + (\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon)u = 0 .$$

c) Finn energinivåene for partikkelen.