UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

F.aman. J.S.Høye
Tlf. 3654

EKSAMEN I FAG 71565 INNFØRING I KVANTEMEKANIKK

Tirsdag 13.august 1985
kl.0900-1400

Tillatt hjelpemiddel: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a) Hva er uttrykket for middelverdien $\langle F\rangle$ til en operator F ? Beregn midlere posisjon $\langle x\rangle$ og impuls $\langle p\rangle$ til en partikkel med normert posisjonsbølgefunksjon

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\pi x/L)e^{i\alpha x} & \text{for } 0\leq x\leq L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

b) Skriv ned relasjonen som en hermitesk operator må oppfylle. Dersom en operator F representerer en fysisk størrelse må den være hermitesk. Hvorfor må den være det ? Vis at egenfunksjoner som tilhører ulike egenverdier for en hermitesk operator er ortogonale.

c) En regulær funksjon $g(\vec{r})$ kan uttrykkes som en rekkeutvikling i egenfunksjoner, som danner et fullstendig sett, slik at

$$g(\vec{r}) = \sum_n a_n \psi_n(\vec{r})$$

Vis hvordan koeffisientene a_n kan bestemmes.

d) En partikkel kan bevege seg fritt i området $0<x<L$ som er begrenset av harde vegger. I grunntilstanden vil denne partikkelen ha egenfunksjonen

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\pi x/L)$$

Ved et gitt tidspunkt er bølgefunksjonen til partikkelen gitt ved uttrykket i punkt a). Hva er da sannsynligheten for at partikkelen skal befinne seg i grunntilstanden?
[Hint: En kan benytte at $\sin u = \frac{1}{2i}(e^{iu}-e^{-iu})$].

Oppgave 2

a) Skriv ned den tidsuavhengige Schrödingerlikningen for en partikkel med masse m i potensial $V(x)$.
La først $V(x)$ være potensialet

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 ,$$

der ω er en konstant. Når partikkelen er i grunntilstanden vil bølgefunksjonen ha formen

$$\psi = N\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

Hva er konstanten N uttrykt ved α når bølgefunksjonen er normert?
Bestem så konstanten α ved å sette den oppgitte formen på ψ inn i Schrödingerlikningen. Hva blir energien i grunntilstanden?

b) Coulombpotensialet under punkt a) perturberes nå slik at $V(x)$ forandres til

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \lambda x^6$$

Energien i grunntilstanden kan nå finnes tilnærmet ved første ordens perturbasjonsregning i parameteren λ , eller en kan regne tilnærmet ved å benytte Rayleigh-Ritz variasjonsmetode der vi her velger å bruke prøvefunksjonen

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\tau x^2}$$

med τ som variasjonsparameter. Resultatet av disse 2 tilnærmelsene kan sammenlignes med den eksakte energien i grunntilstanden. Hvilken av disse 3 energiene vil være lavest, og hvilken vil være høyest? Gi kort begrunnelse for svaret.
Beregn så tilnærmet energien i grunntilstanden ved de 2 tilnærmelsene angitt ovenfor.

Oppgitte formler:

$$\lambda E_n^{(1)} = \lambda \langle n | V | n \rangle$$

$$E = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\, \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$