UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor P.C.Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 72031 FASTE STOFFERS FYSIKK I

Lørdag 30.mai 1987
kl.0900-1600

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

Et éndimensjonalt Bravaisgitter av identiske atomer med masse m har harmonisk vekselvirkning med kraftkonstant α mellom nærmeste naboer. Gitteravstanden er a.

a) Vis at bevegelseslikningene er

$$m\ddot{u}_n = \alpha(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \text{ , alle } n \text{ , og finn dispersjons-}$$

relasjonen og gruppehastighet for bølgeforplantning i gitteret.

b) Vis sammenhengen mellom ovenstående atomære dynamikk og den makroskopiske svingelikning (bølgelikning)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \ .$$

c) Beregn frekvensfordelingen $g(\omega)$ for det éndimensjonale gitteret i punkt a.

Oppgave 2

a) Definer et Bravaisgitter, en primitiv enhetscelle, og det resiproke gitter.

b) Et Bravaisgitter er invariant under rotasjon med en vinkel $\phi = 2\pi/n$ om en rotasjonsakse. Kan n være 5 ? Bevis svaret ditt.

c) Røntgenstråling med bølgevektor $\vec{k}_i$ faller inn på en perfekt krystall, og den utgående elastisk spredte stråle har bølgevektor $\vec{k}_s$. Utled betingelsen for konstruktiv interferens (Laues interferensbetingelse).

d) Angi noen eksperimentelle metoder som sørger for at interferensbetingelsen oppfylles.

Oppgave 3

Natrium danner et kubisk romsentrert gitter, med en gitterkonstant a=4.25 Å i den konvensjonelle kubiske enhetscella.

Det er en utmerket antagelse at ledningselektronene (ett pr.atom) fyller et øverste energiband av frielektronform med en effektiv masse m^* .

Eksperimentelt er det mulig å finne hvilket energiområde $\Delta\epsilon$ som ledningselektronene dekker. (Metode: Ved bombardement med en energirik elektronstråle skytes ledningselektroner ut, og en studerer spektret av de bløte røntgenstrålene som emitteres når hullet fylles). For Na finnes $\Delta\epsilon=3.0$ eV . Bruk denne verdien til å bestemme den effektive massen m^* for ledningselektronene i natrium.

Oppgave 4

a) I en halvleder i likevekt ved temperatur T har bunnen av ledningsbandet følgende isotrope form

$$\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_\ell + \hbar^2 k^2/2m_\ell \ .$$

Finn et uttrykk for antallstettheten n(T) av elektroner i ledningsbandet. Vis at når Ferminivået μ ligger tilstrekkelig under bunnen av ledningsbandet $(\epsilon_\ell - \mu >> kT)$ er

$$n(T) \simeq n_c \, e^{(\mu-\epsilon_\ell)/k_B T} \ ,$$

med forkortelsen

$$n_c \equiv 2(m_\ell k_B T/2\pi\hbar^2)^{\frac{3}{2}} \ .$$

b) Halvlederen er av n-type, dopet med N_d donoratomer pr. volumenhet. Antallstettheten n_d av eksiterte donorelektroner antas ha følgende temperaturavhengighet

$$n_d = \frac{N_d}{1+2e^{(\mu-\epsilon_d)/k_BT}} .$$

(Uttrykket skal ikke utledes). Her er ϵ_d donornivået. Hva kan du umiddelbart si om verdien av μ ved det absolutte nullpunkt ?

Sett opp en likning som bestemmer sammenhengen mellom Fermi-nivået og temperaturen, når valensbandet antas fullt besatt. (Forutsett som i punkt a at det er få elektroner i ledningsbandet).

c) Vis at under ovenstående forutsetninger er Fermivinået gitt ved

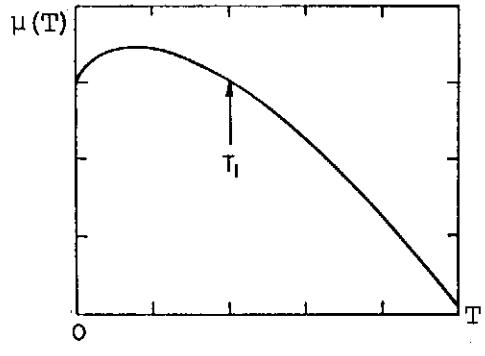
$$\mu(T)=\epsilon_d+ k_BT \ln \left[\frac{1}{4}\sqrt{1+ \frac{8N_d}{n_c(T)} e^{(\epsilon_\ell-\epsilon_d)/k_BT}} - \frac{1}{4}\right]$$

Hva er $\mu(0)$, verdien ved $T=0$?

d) Vis at $n(T)$ er gitt ved

$$n(T) = \frac{2N_d}{1 + \sqrt{1+8 N_d n_c^{-1} e^{(\epsilon_\ell-\epsilon_d)/k_BT}}},$$

der $n_c(T)$ er gitt i punkt a.



e) Finn et approksimativt lavtemperatur-uttrykk for $\mu(T)$ når eksponensielt små ledd (av orden $e^{-(\epsilon_\ell-\epsilon_d)/k_BT}$) sløyfes. Argumenter ut fra dette at $\mu(T)$ har et maksimum som på figuren og anslå temperaturen T_1 der

$$\mu(T_1) = \mu(0) .$$

f) Når temperaturen er høy bryter minst én av ovenstående forutsetninger sammen, og halvlederen går over fra å være ekstrinsikk til å være intrinsikk. Hva vil det si ? Skisser forløpet av $\mu(T)$ og $n(T)$, også utenfor gyldighetsområdet for uttrykkene i punkt c og punkt d.

VEDLEGG

Noen av nedenforstående uttrykk og konstanter kan vise seg nyttige.

Midlere besettelsestall for fermioner:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

Midlere besettelsestall for fononer:

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Nivåtetthet for frie elektroner $(\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_0 + \hbar^2 k^2/2m)$:

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(\epsilon-\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

Plancks konstant $h = 6.6262 \cdot 10^{-34}$ Js

Elektronmassen $m = 9.1096 \cdot 10^{-31}$ kg

$mc^2 = 0.511$ MeV

Finstrukturkonstanten: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$

Lyshastigheten i vakuum: $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s

Ved romtemperatur: $k_B T \simeq 1/40$ eV

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \; ; \; \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \; ; \; \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

1 eV $= 1.602\ 10^{-19}$ J

1 Å $= 10^{-10}$ m .