UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NOREGS TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Fagleg kontakt under eksamen:
Namn: Johannes Falnes
Tlf.: 3452

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK

Fakultet 4 og 9 (Elektro- og Datateknikk/Økonomi og Arbeidslivsvitenskap)
Måndag 16. mai 1994
Tid: kl. 0900-1500

Tillatne hjelpemiddel:
- Godkjend lommekalkulator
- K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk
- O.H. Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk
- K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung
- S. Barrett and T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Opplysningar som det kanskje blir bruk for og som kandidaten sjølv må tolka:

$$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$
$$e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}$$
$$h = 2\pi\hbar = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ \text{Js}$$
$$c = 3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}$$

Når

$$F = F(x, p_x) \quad \text{er} \quad F_{op} = F(x, -i\hbar\,\partial/\partial x)$$

$$\langle F\rangle = \int \Psi^*(x,t)\,F_{op}\Psi(x,t)\,dx$$

Hovudmaksimum: $\sin\theta_m = m\lambda/d$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...)$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$I_n \equiv \int_0^\infty u^n \exp\{-u^2\}du$$

der

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad I_1 = \frac{1}{2} \qquad I_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \qquad I_3 = \frac{1}{2} \qquad I_4 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$$

Merk at somme underpunkt i oppgåvene kan løysast heilt eller delvis også om ein ikkje har fullført alle føregåande underpunkt.

Oppgåve 1

Ein masse $m = 5{,}00$ kg er gjennom ei fjør med fjørkonstant (fjørstivhet) k forbunde med eit fast punkt. Parallelt med fjøra kan det vera ein mekanisk dempar med dempingsresistans b. Dette svingesystemet, lyder den lineære differensiallikninga

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

der $x = x(t)$ er utsvinget av massen (rekna frå likevektsposisjonen). Vidare er F(t) ei gitt ytre kraft som verkar på massen (i x-retninga).

(a) Når svingesystemet svingar fritt (dvs. når $F(t) \equiv 0$), har det ein svingeperiode $T_0 = 10{,}0$ s. Finn fjørkonstanten k (uttrykt ved m og T_0) når vi reknar med at svinginga er udempa ($b = 0$). Rekn også ut talsvar.

(b) Når den mekaniske dempinga er verksam ($b \neq 0$), blir det ei dempa svingning, med "periode" $T_d = 10{,}5$ s (slik at det er ein tidsskilnad $T_d/2$ mellom kvar gong massen passerer likevektsposisjonen $x = 0$). Finn dempingsresistansen b (uttrykt ved T_0, T_d og m). Rekn og ut talsvar.

For tilfellet med

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

der $F_0 = 1{,}00$ N, har differensiallikninga ei partikulær løysing

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

der

$$A_0 = \frac{F_0}{\omega |Z_m|} \quad \text{og} \quad \cos\phi_0 = \frac{b}{|Z_m|}$$

med

$$|Z_m| = \sqrt{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$$

(c) Finn bokstavuttrykk og talsvar for den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_1$ der utsvinget x har størst amplitude $A_{0,max}$ og for den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_2$ der farten $v = dx/dt$ har størst amplitude.

(d) Kva er farten $v(t)$ og akselerasjonen $a(t)$ uttrykte ved ω, t, A_0 og ϕ_0 og alternativt ved ω, t, F_0, $|Z_m|$ og ϕ_0? (To svar for $v(t)$ og to svar for $a(t)$ skal skrivast ned). Finn så talsvar for amplitudane av $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ når $\omega = 0{,}800$ rad/s.

Oppgåve 2

I det gule lyset frå natrium er det to emisjonslinjer som (i vakuum) har bølgjelengder $\lambda_a = 589{,}0$ nm og $\lambda_b = 589{,}6$ nm.

Lyset skal undersøkjast med eit diffraksjonsgitter med spalteavstand (gitterkonstant) $d = 2{,}500 \cdot 10^{-6}$ m. Lyset kjem vinkelrett inn mot gitteret på den eine sida, og på den andre sida av gitteret fell det lys på ein skjerm som er parallell med gitteret i stor avstand.

(a) Kor store er avbøyingsvinklane θ_a og θ_b for dei to bølgjelengdene i 2. ordens hovudmaksimum (2. ordens spektrallinje)? Skriv opp bokstavsvar og talsvar.

(b) Forklar kor mange hovudmaksimum bølgjelengda λ_a vil gi i alt.

(c) Forklar kor mange spalter N gitteret minst må har når dei to bølgjelengdene λ_a og λ_b skal kunne skiljast frå kvarandre i 2. ordens hovudmaksimum.

Då gitterspaltene har endeleg breidd D ($D > 0$, men sjølvsagt $D < d$), vil det bli Fraunhofer-diffraksjon som gjer at lyset er sterkare i nullte ordens hovudmaksimum enn i alle høgare ordens hovudmaksimum.

(d) Når vi stiller som krav at fyrste nullpunktet i diffraksjonsmønsteret skal vera ved større avbøyingsvinkel enn avbøyingsvinkelen for 2. ordens hovudmaksimum i interferensmønsteret, kor stor kan då spaltebreidda D maksimalt vera?

Oppgåve 3

Løysinga av den tidsuavhengige Schrödinger-likninga

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

viser at for ein enkel harmonisk oscillator, der

$$U(x) = \frac{1}{2} C x^2$$

må energien for ein stasjonær tilstand ha ein verdi

$$E = E_\nu = (\nu + \frac{1}{2})\hbar\sqrt{C/m} = (\nu + \frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

(a) Vis at

$$\psi_a(x) = A \exp\{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\} \quad \text{og} \quad \psi_b(x) = Bx \exp\{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\}$$

begge er partikulære løysingar av Schrödinger-likninga dersom E har bestemte verdiar E_a og E_b, respektivt. Bestem konstanten α som går inn i desse løysingane. Kva for heiltal ν (sjå ovanfor) passar for desse to partikulære løysingane?

(b) Bestem konstanten A slik at $\psi_a(x)$ er ein normalisert bølgjefunksjon. Vi skal ikkje her eksplisitt bestemma konstanten B, men likevel gå ut frå at B er valt slik at også $\psi_b(x)$ er normalisert.

Den tidsavhengige Schrödinger-likninga har partikulære løysingar

$$\Psi_i(x,t) = \psi_i(x)\exp\{-i E_i t/\hbar\}$$

for $i = a$ og $i = b$.

3 (c) For tilfellet med $\Psi(x,t) = \Psi_a(x,t)$ finn forventingsverdien $\langle x \rangle$ og uvissa (Δx) i posisjonen (utsvinget) av partikkelen, uttrykt ved $\hbar$, m og ω. Merk at $(\Delta x)^2 = \langle (x-\langle x \rangle)^2 \rangle$.

(d) Finn forventingsverdien av kvadratet av impulsen $\langle p^2 \rangle$, når $\Psi(x,t) = \Psi_a(x,t)$.

(e) Finn forventingsverdien av kinetisk energi, av potensiell energi og av total energi, når $\Psi(x,t) = \Psi_a(x,t)$.

(f) La no

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_a(x,t) + \Psi_b(x,t))$$

og finn forventingsverdien $\langle x \rangle$ for dette tilfellet. Gå her ut frå at $\Psi(x,t)$ er normalisert (men det er ikkje krav om at dette skal visast her).

Krafta som verkar mellom atoma i H_2-molekylet, og som skriv seg frå elektrisk vekselverknad mellom atoma, kan tilnærma skrivast som

$$F(r) = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}$$

der r er avstanden mellom dei to atomkjernane, og $a = 1{,}08 \cdot 10^{-28}$ Nm^2 og $b = 8{,}1 \cdot 10^{-39}$ Nm^3. Atoma kan vibrera i forhold til kvarandre slik at r oscillerer.

(g) Skisser F og den tilsvarande potensielle energien U(r) som funksjonar av r (to kurver, gjerne i same grafen).

(h) Finn bokstavuttrykk og talsvar for $r = r_0$ som er avstanden ved likevekt, og for den tilsvarande lågaste potensielle energien $U_0 = U(r_0)$. Kva kallar vi r_0 og $-U_0$?

(i) Som det vil gå fram av grafen i (g) er F(r) tilnærma lineær nær $r = r_0$. Dvs. at der er $F(r) \approx -C(r-r_0)$. Finn bokstavuttrykk og talsvar for "fjørkonstanten" C, og for vinkelfrekvensen ω for vibrasjonane.

(j) Når avviket frå likevekt er lite, dvs. ved låge temperaturar, kan vi sjå på systemet som ein enkel harmonisk oscillator, der energien er kvantisert. Som ei grov forenkling skal vi gå ut frå at dette er gyldig også ved høgare temperaturar. Molekylet får tilført energi slik at det blir spalta i to H-atom (molekylet dissosierer). Ved kor høgt kvantetal ν skjer dette?

Oppgåve 4

(a) Ein ideell gass som har temperatur $T_1 = 293$ K og er under trykk $p_1 = 4{,}4$ MPa i eit volum $V_1 = 20$ m^3, blir utvida adiabatisk til eit volum V_2 slik at trykket blir redusert til $p_2 = 3{,}6$ MPa. Med utgangspunkt i tilstandslikninga $pV = nRT$ og i samanhengen pV^γ = konstant for adiabatisk volumendring skal det visast at gassen kan utføra eit arbeid

$$W_{ad} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}\right)$$

Rekn også ut talsvar for W_{ad} (når $\gamma = 1{,}40$).

(b) Finn bokstavuttrykk og talsvar for temperaturen T_2 som gassen har etter den adiabatiske utvidinga.

(c) Utlei eit uttrykk for det arbeidet W_{it} som gassen ville ha utført dersom volumutvidinga hadde skjedd isotermisk (i staden for adiabatisk). I svaret skal V_1, p_1 og p_2 gå inn. Rekn også ut talsvar for W_{it}.

(d) Finn bokstavuttrykk og talsvar for den varmemengda Q_{it} som gassen blir tilført under den isoterme ekspansjonen.

(e) Ein kuleforma ståltank inneheld $V_1 = 20$ m^3 av ein ideell gass med trykk $p_2 = 3{,}6$ MPa og med temperatur T_2 som funne i punkt (b). Veggen i ståltanken er $b = 19$ mm tjukk, og den innvendige diameteren $2a$ er gitt ved $V_1 = (4\pi/3)a^3$. Vi skal gå ut frå at ytreflata og indreflata av veggen har temperatur T_1 og T_2, respektivt. Jfr. punkta (a) og (b). Finn den varmestraumen dQ_2/dt som går gjennom veggen, uttrykt ved a, b og k, der varmeleiingsevna er $k = 40$ J·s^{-1}·m^{-1}·K^{-1} for stål. Rekn også ut talsvar for dQ_2/dt (i J/s = W).

T_1, T_2,

(f) Ståltanken fylt med trykkluft (som vi her ser på som ein ideell gass) blir brukt som eit energilager. Ein trykklufteffekt på $P_1 = 200$ kW blir levert til ein luftturbin som kan arbeida med inngangslufttrykk i området $p_1 = 4{,}4$ MPa til $p_2 = 3{,}6$ MPa. Kor lang tid kan så stor effekt (200 kW) leverast til turbinen, dersom trykket opphavleg var p_1 og dersom det ikkje blir fylt ny trykkluft på tanken? Gi talsvar både for adiabatisk og isotermt tilfelle. Bruk talsvara under punkta (d) og (e) til å vurdera om det er rettare å rekna med adiabatisk ekspansjon enn med isoterm ekspansjon i dette tilfellet. Vil det vera mykje å vinna på å varmeisolera tanken?