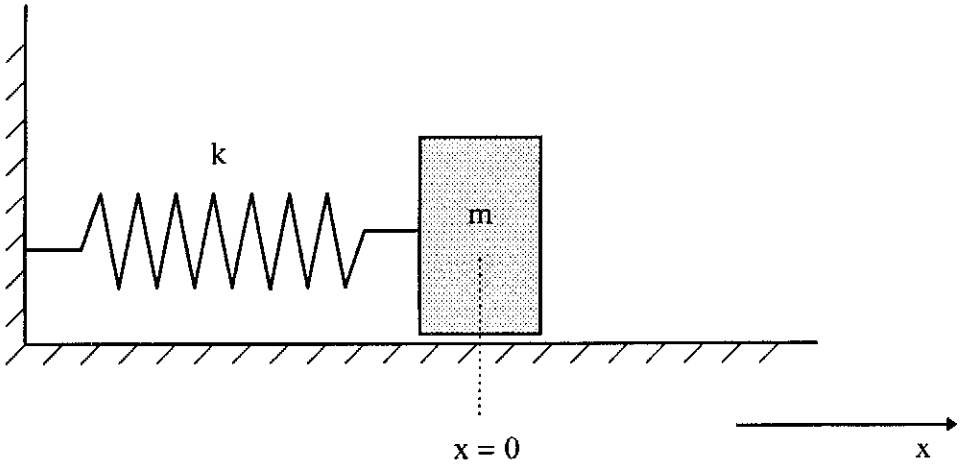
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Knut Arne Strand
Telefon: 93461

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK
Fakultet 4 og 9 (Elektro- og Datateknikk/Økonomi og Arbeidslivsvitenskap)
Torsdag 8. juni 1995
Tid: kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler:
- S. Barnett and T. M. Cronin: Mathematical Formulae
- Godkjent lommekalkulator

Oppgave 1.



I denne oppgaven skal vi betrakte en masse m som kan bevege seg friksjonsfritt og som er festet til en fjær. Vi antar for hele oppgaven at fjæren er masseløs og ideell slik at fjærkraften F_f alltid er gitt ved:

$$F_f = -kx \qquad (1)$$

der k er fjærkonstanten og x er avviket fra likevektsposisjonen når oscillatoren kan bevege seg horisontalt (dvs. $x = 0$ for den posisjon massen vil innta når den er i ro og ingen krefter virker på den i x-retning). Vi antar også for hele oppgaven at massen bare vil bevege seg (svinge) i én dimensjon (posisjonskoordinaten i denne dimensjonen kalles alltid x).

a) Utled (bl.a. ved å nytte Newtons 2. lov, $F = ma$) at massens posisjon må oppfylle følgende differensialligning når massen beveger seg horisontalt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{2}$$

der $\omega \equiv \sqrt{k/m}$!

Vi snur så oscillatoren slik at den kan svinge i vertikal retning og altså også er påvirket av tyngdekraften $F_g = mg$ (der g er tyngdens akselerasjon). Likevektsposisjonen i vertikalretning kalles x_0. (Når oscillatoren kan svinge vertikalt, velges x-aksen positiv i tyngdefeltets retning, dvs. nedover.)

b) Finn fjærkonstanten k uttrykt ved m, g og x_0 !

Vi snur så oscillatoren tilbake slik at den igjen kan svinge horisontalt, men holder oscillatoren fast i posisjon x_0. Vi slipper den så med null hastighet fra denne posisjonen.

c) Finn posisjonen x som funksjon av tiden t for oscillatoren, uttrykt ved x_0 og g !
Finn også tidspunktene (dvs. tallsvar for disse) når oscillatoren vil passere likevektsposisjonen $x = 0$ når $x_0 = 0{,}010$ m og $g = 9{,}8$ m/s^2 !
Det kan benyttes som kjent at en generell løsning av (2) er:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

der A og φ er vilkårlige konstanter.

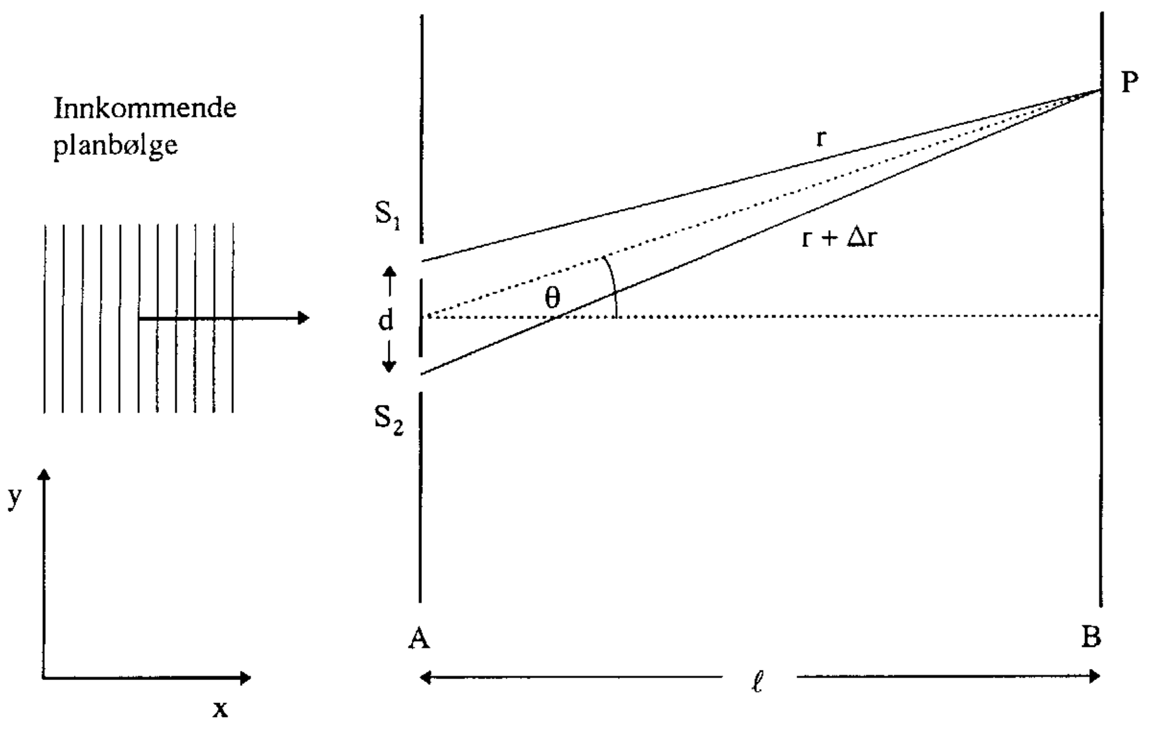
d) Finn hastigheten v og akselerasjonen a som funksjon av tiden t uttrykt ved x_0 og g !
Finn også tallsvar for tidspunktene vi har maksimal akselerasjon når tallverdiene for x_0 og g er som i pkt. c !
Finn også totalenergien E til oscillatoren uttrykt ved m, x_0 og g, og tallsvar for E når $m = 0{,}010$ kg og x_0 og g har tallverdier som gitt i pkt. c !

Vi snur ennå en gang oscillatoren slik at den kan bevege seg vertikalt (og antar fortsatt at den utelukkende beveger seg i én dimensjon, dvs. nå vertikalt).

e) Utled den differensialligningen for posisjonen x som nå beskriver bevegelsen til massen m !
Utled også den generelle løsning av denne ligningen for posisjonen x som funksjon av tiden t uttrykt ved x_0 og g (samt ved to vilkårlige konstanter) ! (Alt som er beregnet og oppgitt tidligere i oppgaven kan benyttes som kjent.)

Oppgave 2.

Vi skal i denne oppgaven betrakte en planbølge med lys (som også er planpolarisert) som kommer inn mot en skjerm A med to spalter S_1 og S_2. Interferensmønsteret dannet av lyset som passerer S_1 og S_2 blir registrert på en skjerm B (som om nødvendig kan være uendelig stor) plassert en avstand ℓ fra A som vist på figuren nedenfor.



Vi antar at spaltene S_1 og S_2 er like og så smale at hver av dem (i samsvar med Huygens' prinsipp) er utgangspunktet for en bølge med en halvsirkel som tverrsnitt. Dvs. vi antar at bølgene fra de to spaltene er sylinderbølger og at spaltene er så lange at vi ikke har problem med ende-effekter der vi observerer lysfordelingen på skjermen B. I hele oppgaven skal vi altså bare regne på det som skjer i det tverrsnitt som papirplanet representerer, der bølgene fra S_1 og S_2 har halvsirkler som bølgefronter.

Vi antar videre for hele oppgaven:

- Avstanden d mellom sentrum av spaltene er 50 μm.
- $\ell \gg d$ slik at lysstrålen fra S_1 til et punkt P på B kan betraktes å være parallell med lysstrålen fra S_2 til P (uavhengig P's plassering).

For første del av oppgaven (dvs. pkt. a og b) antar vi:

- Det innkommende lyset er fullstendig koherent og har bølgelengde $\lambda = 500$ nm.

a) Finn et uttrykk for de bøyningsvinkler θ som gir maksimum intensitet (dvs. sentrum i de lyse interferensstripene) uttrykt ved λ og d !
Finn tallsvar for disse bøyningsvinklene θ (med oppgitte tallverdier innsatt for λ og d) !

(Merk at det ikke er tillatt å nytte det som er oppgitt i pkt. b for å løse dette oppgavepunktet.)

De elektriske feltene henholdsvis fra spalt S_1 og fra spalt S_2, kan i et punkt P på observasjonsskjermen (dvs. at lyset er bøyd vinkelen θ) uttrykkes ved:

$$E_1 = E_{10}\cos[kr - \omega t - \varphi]$$

$$E_2 = E_{20}\cos[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]$$

der $k = 2\pi/\lambda$, ω er vinkelfrekvensen, φ er en fasekonstant (som vi ikke har bestemt), r er avstanden fra S_1 til P og $r + \Delta r$ er avstanden fra S_2 til P. E_{10} og E_{20} er avhengige av henholdsvis r og $r + \Delta r$. I pkt. b skal vi imidlertid betrakte små θ og konstant ℓ. Vi kan da med god tilnærmelse for dette punktet sette:

$$E_{10} = E_{20} \equiv E_0 \quad \text{(uavhengig P's plassering på skjermen B)}$$

b) Utled at lysets intensitetsfordeling på observasjonsskjermen i y-retning er gitt ved:

$$I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

der I_θ er intensiteten til lyset bøyd vinkelen θ, I_0 er intensiteten i foroverretning (dvs. for $\theta = 0$) og $\delta = kd \sin\theta$!

Kontrollér at det er samsvar mellom dette resultatet og det du fikk i pkt. a !

Vi antar nå for resten av oppgaven at innkommende lysstråle ikke er fullstendig koherent. Vi antar fortsatt at den innkommende strålen er fullstendig koherent over hele tverrsnittet før den kommer inn mot spaltene (og for pkt. d før den kommer til glassplater som plasseres foran S_2). Men vi antar nå at frekvensbredden til det innkommende lyset er endelig og at innkommende lys har en endelig koherenslengde ℓ_c lik 5 μm. (Dvs. at dersom en kjenner fasen i et punkt på innkommende stråle, så kan fasen predikeres med noenlunde sikkerhet 5 μm i strålens forplantningsretning, men ikke vesentlig lengre.) Middelbølgelengden λ_m lar vi fortsatt være 500 nm.

c) Vil interferensmønsteret på observasjonsskjermen B være annerledes når $\ell_c = 5$ μm enn om $\ell_c = \infty$ (dvs. fullstendig koherens) ? Hvis ja, forklar kvalitativt hvordan det er annerledes og hvorfor !

I resten av oppgaven skal vi la spalten S_2 være tildekket av glassplater (bare én om gangen) av forskjellige tykkelser (glassplatene plasseres foran S_2, dvs. på den siden av skjermen A som vender mot lyskilden) mens S_1 ikke er tildekket. Vi antar at sideflatene til glassplatene er parallelle med hverandre og fullstendig plane. Vi ser bort fra diffraksjon pga. kanten av en glassplate mellom S_1 og S_2. Brytningsindeksen for glassplatene antaes å være 1,50.

d) Hvordan blir interferensmønsteret (som registreres på skjermen B) sammenlignet med det uten glassplate foran S_2 om glassplaten foran S_2 har tykkelse som nedenfor angitt ?

1) 500 nm
2) 1000 nm
3) 30 μm
4) 1000 μm

Oppgitt

- Intensiteten for en periodisk elektromagnetisk bølge i vakuum er gitt ved:

  $$I = \varepsilon_0 c_0 \overline{E^2}$$

  der E er det elektriske feltet til bølgen, $\overline{E^2}$ er E^2 midlet over en periode, ε_0 er permittiviteten i vakuum og c_0 er lyshastigheten i vakuum.

  Dersom $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ der φ er en konstant (dvs. uavhengig t) har vi:

  $$\overline{E^2} = \tfrac{1}{2} E_0^2$$

- $$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

- Når lyshastigheten i vakuum kalles c_0, så er lyshastigheten (dvs. fasehastigheten for lys) c i et stoff med brytningsindeks n gitt ved $c = c_0 / n$, og dersom vakuumbølgelengden er λ, så er bølgelengden i stoffet λ_s gitt ved $\lambda_s = \lambda / n$.

Oppgave 3.

Vi skal i denne oppgaven (som i Oppgave 1) betrakte en harmonisk oscillator (dvs. en partikkel som kan svinge harmonisk) som kan bevege seg i én dimensjon. Men vi skal her regne kvantemekanisk. I første del av oppgaven lar vi partikkelen ha potensiell energi $\frac{1}{2} m\omega^2 q^2$ (når posisjonen er q) og Hamiltonoperator gitt ved:

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \qquad (1)$$

der $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ og q er posisjonskoordinaten. $\omega = \sqrt{k/m}$ der k er fjærkonstanten og m er partikkelmassen.

(Alle bølgefunksjoner i denne oppgaven er normerte eller antatt normerte.)

a) Vis at

$$\psi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega q^2/2\hbar} \tag{2}$$

er en egenfunksjon for $\hat{H}_1$ og finn den tilhørende egenverdien ! (Dvs. vis at $\psi_0(q)$ oppfyller den tidsuavhengige Schrödingerligningen $\hat{H}_1\psi_0(q) = E_0\psi_0(q)$ og finn E_0 !)

b) Anta så at vi ved t = 0 har en tilstand beskrevet ved bølgefunksjonen $\psi_0(q)$ gitt ved lign. (2). Hva blir da bølgefunksjonen $\Psi_0(q,t)$ som beskriver tilstanden for vilkårlig t ? Beskriver $\Psi_0(q,t)$ en stasjonær tilstand ? Begrunn svaret !

(At en tilstand (beskrevet ved $\Psi(q,t)$) er stasjonær betyr at sannsynlighetstettheten ($|\Psi(q,t)|^2$) er tidsuavhengig, og at middelverdien av enhver fysisk størrelse (som ikke er eksplisitt tidsavhengig) er tidsuavhengig.)

Vi antar nå at partikkelen i tillegg til fjærkraften ($F_f = -kq$) også utsettes for en konstant kraft F_k. Når 0-punktet for posisjonskoordinaten q og 0-punktet for den potensielle energien fortsatt velges som under første del av oppgaven, blir uttrykket for partikkelens potensielle energi nå $\frac{1}{2}m\omega^2(q-q_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2$ (der $q_0 = F_k / m\omega^2$). Hamiltonoperatoren er da gitt ved:

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(q-q_0)^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 q_0^2 \tag{3}$$

c) Vis at

$$\chi(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega(q-q_0)^2/2\hbar} \tag{4}$$

er en egenfunksjon for $\hat{H}_2$ med tilhørende egenverdi $\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2$!

d) Hva er middelverdien <q> til posisjonen for tilstanden beskrevet ved $\chi(q)$ gitt ved lign. (4) ? Begrunn svaret !

Vi antar så at vi brått skrur av (tar bort) kraften F_k slik at Hamiltonoperatoren for problemet igjen er $\hat{H}_1$ gitt ved lign. (1). Vi antar videre at kraften ble så brått avskrudd at vi fortsatt umiddelbart etter avskruingen har at tilstanden er beskrevet ved $\chi(q)$ gitt ved lign. (4). I fortsettelsen kaller vi tidspunktet der vi skrur av F_k for t = 0, og bølgefunksjonen $\Psi(q,t)$ som beskriver tilstanden oppfyller dermed:

$$\Psi(q,0) = \chi(q) \tag{5}$$

Det kan da vises (skal ikke vises her) at $\Psi(q,t)$ for vilkårlig t er gitt ved:

$$\Psi(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(q)\, e^{-iE_n t/\hbar} \tag{6}$$

der ψ_n er de ortonormale egenfunksjonene til $\hat{H}_1$ med tilhørende egenverdier $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ og c_n er konstanter gitt ved:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, q_0\right)^n e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}q_0^2} \tag{7}$$

med q_0 antatt ulik 0 og derfor $c_n \neq 0$ for alle n.

e) Finn sannsynlighetene p_n for ved måling av energien E, å finne verdiene $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ (n = 0, 1, 2, ...) for vilkårlig tid t ! Er sannsynlighetene p_n tidsavhengige ?
Beskriver $\Psi(q,t)$ (gitt ved lign. (6) og (7)) en stasjonær tilstand ?

f) Er middelverdien <E> til energien tidsavhengig for tilstanden beskrevet ved $\Psi(q,t)$ (gitt ved lign. (6) og (7)) ? Begrunn svaret !
Er middelverdien <q> til posisjonen tidsavhengig for tilstanden beskrevet ved $\Psi(q,t)$? Begrunn svaret med fysikalsk argumentasjon !

Oppgitt

- En generell løsning av den tidsavhengige Schrödingerligningen

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial t} = \hat{H}_1\Psi(q,t)$$

for éndimensjonal harmonisk oscillator er gitt ved:

$$\Psi(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(q)\, e^{-iE_n t/\hbar}$$

der $\psi_n(q)$ er de ortonormale egenfunksjonene til Hamiltonoperatoren $\hat{H}_1$ gitt ved lign. (1), og $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ er de tilhørende egenverdiene. c_n er vilkårlige konstanter (uavhengig t).

- Middelverdien <F> for en fysikalsk observerbar størrelse F er gitt ved:

$$<F> = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, d\tau$$

der $\hat{F}$ er operatoren tilsvarende F, og integralet er et bestemt integral som skal taes over det aktuelle rommet.

- Anta at en tilstand er beskrevet ved Ψ, og at Ψ ved tid t er gitt ved:

$$\Psi = \sum_n b_n(t)\, \varphi_n$$

der φ_n er de ortonormale egenfunksjonene til en operator $\hat{F}$ med tilhørende egenverdier f_n (dvs. $\hat{F}\varphi_n = f_n\varphi_n$). Da er sannsynligheten for å finne verdien f_n når en måler den fysiske størrelsen F (tilsvarende $\hat{F}$) gitt ved $|b_n(t)|^2$.