UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Knut Arne Strand
Telefon: 93461

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK
Fakultet 4 og 9 (Elektro- og Datateknikk / Økonomi og Arbeidslivsvitenskap)
Onsdag 23. august 1995
Tid: kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler:
- S. Barnett and T. M. Cronin: Mathematical Formulae
- Godkjent lommekalkulator

Oppgave 1.

Vi skal i denne oppgaven betrakte bølger på en horisontalt oppspent streng. Vi gjør følgende antagelser:

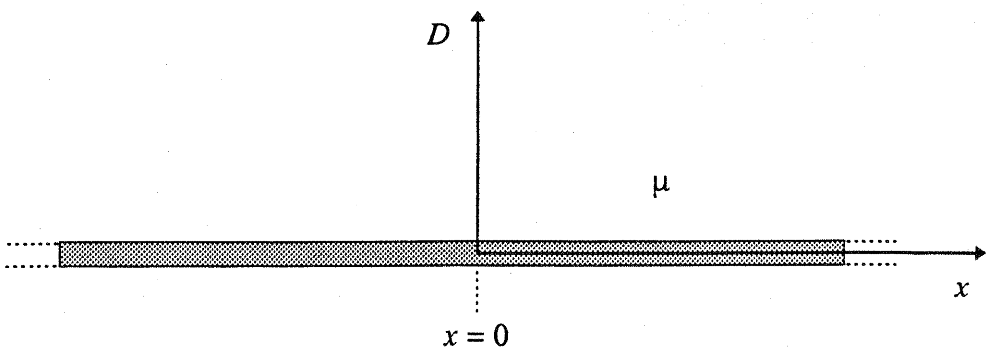
- Strengen er fullstendig elastisk og uten bøyningsmotstand.
- Strengen er i uforstyrret tilstand påvirket av en strekk-kraft F_T (som er tilstrekkelig stor til at vi kan se bort fra tyngdekraftens virkning på strengen).
- Strengelementene svinger bare transversalt (dvs. på tvers av strengens lengderetning) i et vertikalt plan.

Vi antar også for hele oppgaven at svingningene er tilstrekkelig små til at de kan beskrives ved følgende bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

der $D(x,t)$ er utsvinget for et strengelement med posisjon x ved tiden t, og v er bølgens hastighet gitt ved $v = \sqrt{F_T / \mu}$ der μ er strengens masse pr. lengdeenhet. (For bølger på streng har vi ikke dispersjon, dvs. at v er uavhengig bølgens frekvens.)

Vi skal i første del av oppgaven betrakte en streng som har konstant masse pr. lengdeenhet μ over hele sin utstrekning. Den er tilstrekkelig lang til at vi kan se bort fra endeeffekter.



Vi antar at vi har en harmonisk vandrebølge som forplanter seg langs strengen i positiv x-retning. Vandrebølgen er beskrevet ved:

$$D(x,t) = D_M \cos[k(x - vt) + \varphi] = D_M \cos(kx - \omega t + \varphi) \tag{2}$$

der D_M er bølgens amplitude, k det angulære bølgetallet, φ en vilkårlig fasekonstant og ω vinkelfrekvensen ($\omega = kv$).

a) Vis at $D(x,t)$ gitt ved ligning (2) tilfredsstiller bølgeligningen (1) !

b) Finn for et vilkårlig punkt på strengen utsvingshastigheten u og vinkelen ϑ som tangenten til strengen i dette punktet danner med x-aksen (uttrykt ved k, v og D_M) for følgende tilfeller:

i) punktet har null utsving og positiv utsvingshastighet !
ii) punktet har maksimum positivt utsving !
iii) punktet har null utsving og negativ utsvingshastighet !
iv) punktet har maksimum negativt utsving !

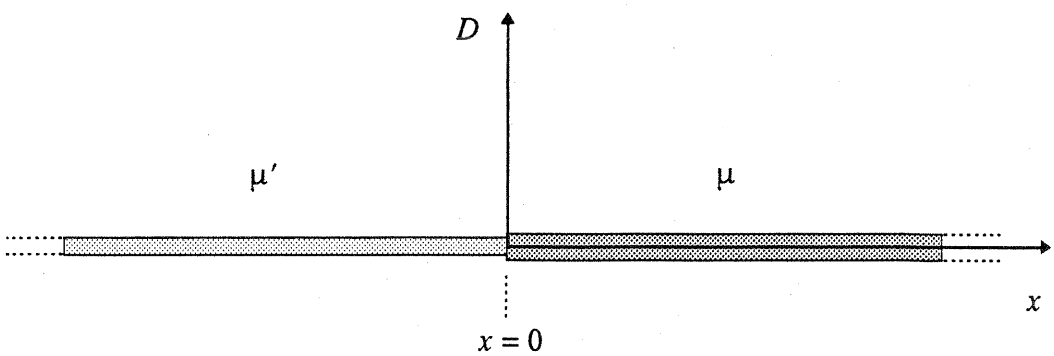
Finn også en sammenheng mellom utsvingshastigheten u og vinkelen ϑ som er gyldig for vilkårlig x og t !

$$\left(\text{Hint:} \quad \tan\vartheta = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} \right)$$

c) Vi antar nå at et strengelement med posisjon $x = 0$ ved tiden $t = 0$ har utsving D_0 og utsvingshastighet $u_0 = \sqrt{3}kvD_0$.
Finn elementets maksimale utsving D_M og maksimale utsvingshastighet u_M samt maksimalverdien ϑ_M for vinkelen ϑ, nå uttrykt ved k, v og D_0! (Både D_0 og D_M er antatt positive.)
Finn også den første positive verdi av t som gir null utsving for strengelementet! (Oppgi svaret i brøkdeler av bølgeperioden T!)

d) Vi antar nå at $k = 6{,}0\ \mathrm{m}^{-1}$, $\mu = 0{,}10$ kg/m, $v = 9{,}0$ m/s og $D_0 = 5{,}0$ cm. Finn tallsvar for perioden T, bølgelengden λ, strekk-kraften F_T, det maksimale utsvinget D_M, den maksimale utsvingshastigheten u_M og maksimalverdien ϑ_M for ϑ!

Vi skal i resten av oppgaven betrakte en streng som for $x = 0$ har en brå forandring i masse pr. lengdeenhet. For $x > 0$ er massen pr. lengdeenhet konstant og kalles μ. For $x < 0$ er også massen pr. lengdeenhet konstant og kalles μ'. Vi antar $\mu' < \mu$.



Vi antar også, som i første del av oppgaven, at strengen er tilstrekkelig lang til at vi kan se bort fra endeeffekter. Vi antar videre også her at vi har en bølge som kommer fra $x = -\infty$ og som beveger seg i positiv x-retning. Ved $x = 0$ blir bølgen delvis reflektert og delvis transmittert. Den innkommende, reflekterte og transmitterte bølge er beskrevet ved henholdsvis:

$$D^{\mathrm{I}}(x,t) = D^{\mathrm{I}}_{\mathrm{M}} \cos[k'(x - v't) + \varphi]$$

$$D^{\mathrm{R}}(x,t) = D^{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}} \cos[k'(x + v't) - \varphi]$$

$$D^{\mathrm{T}}(x,t) = D^{\mathrm{T}}_{\mathrm{M}} \cos[k(x - vt) + \varphi]$$

(Merk at alle bølgene må ha samme vinkelfrekvens $\omega = k'v' = kv$ og samme fase φ, men at det angulære bølgetallet og hastigheten er forskjellig for $x < 0$ og for $x > 0$, dvs. $k' \neq k$ og $v' \neq v$.
Merk også at når $\mu' < \mu$ blir $D^{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}}$ negativ når $D^{\mathrm{I}}_{\mathrm{M}}$ og $D^{\mathrm{T}}_{\mathrm{M}}$ er positive.)

e) Finn v' og k' uttrykt ved henholdsvis v og k (og μ og μ') !
Finn videre D_M^I og D_M^R uttrykt ved D_M^T (og μ og μ') !

(Hint: For $x = 0$ må vi ha:

(i) $D^I(0,t) + D^R(0,t) = D^T(0,t)$ (strengen er kontinuerlig)

(ii) $\frac{\partial}{\partial x}\left[D^I(x,t) + D^R(x,t)\right]\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} D^T(x,t)\Big|_{x=0}$ (strengen har ingen knekk))

f) For $x < 0$, finn posisjonene (kalles x_n^{maks}) til de strengelementene som har størst maksimalutsving og posisjonene (kalles x_n^{min}) til de som har minst maksimalutsving, uttrykt ved bølgelengden $\lambda' (= 2\pi / k')$!
(Vi antar at både innkommende og reflektert bølge har vart uendelig lenge.)

Vi antar nå (som i pkt. c) at strengen i posisjon $x = 0$ ved tiden $t = 0$ har utsving D_0 og utsvingshastighet $u_0 = \sqrt{3}kvD_0$. Finn maksimalt utsving D_M' og maksimal utsvingshastighet u_M' for posisjonene x_n^{maks} og for posisjonene x_n^{min} uttrykt ved k, v, D_0, μ og μ' ! (D_0 og D_M^T antas begge positive.)
Finn også tallsvar for D_M' og u_M' for posisjonene x_n^{maks} og for posisjonene x_n^{min} når tallverdiene for k, v, D_0 og μ er som gitt i pkt. d og $\mu' = 0{,}060$ kg/m !

(Merk at dette punktet er både vanskelig og arbeidskrevende, så ikke bruk opp hele eksamenstiden på dette før du går videre til de to neste oppgavene !)

Oppgitt

- $$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

(Merk at det kan (avhengig av hvordan oppgaven gjøres) bli bruk for å nytte at $-\cos(b) = \cos(b+\pi)$ i forbindelse med denne formelen.)

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal vi beskjeftige oss med noen forskjellige eksperimenter som kan gjøres med lys.

Vi skal først betrakte et historisk viktig eksperiment, nemlig Youngs interferens-eksperiment (også kalt Youngs tospalteeksperiment) utført av T. Young i 1801.

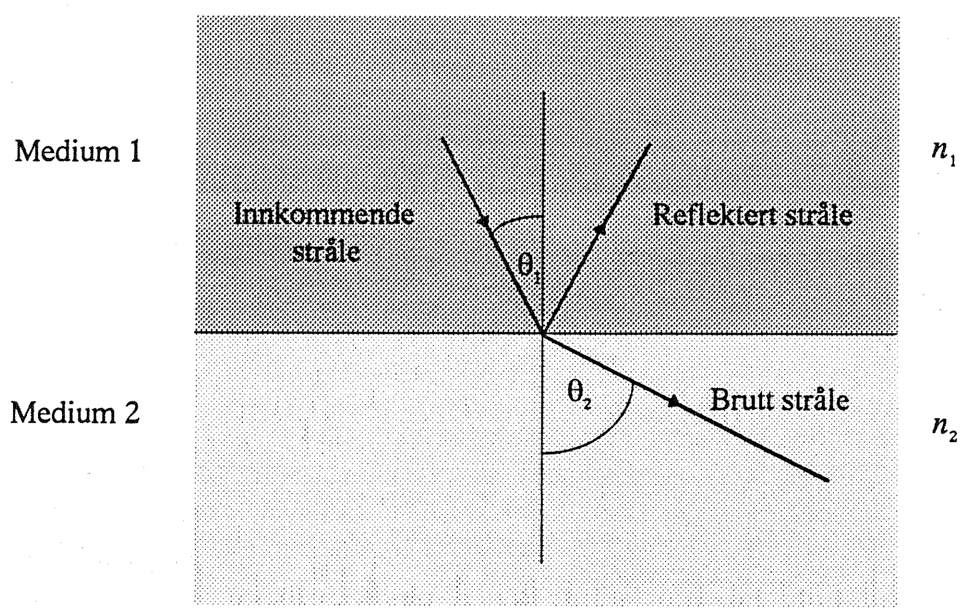
a) Gi en prinsippskisse for dette eksperimentet og forklar hvordan det viser at lys må ha periodisk bølgenatur !

Det har opp gjennom tiden vært diskutert om lyshastigheten var endelig eller uendelig stor. Den første måling på jorden ble gjort i 1849 og gav som resultat $c = 3{,}12\cdot 10^8$ m/s.

b) Gi en prinsippskisse av en eller annen måte å måle lyshastigheten på som kan gi en nøyaktighet av minst samme størrelsesorden som den målingen som ble gjort i 1849 !

Når lys går fra et medium med brytningsindeks n_1 til et annet med brytningsindeks n_2 forskjellig fra n_1, vil en del av det innkommende lys bli reflektert. Den resterende del av lyset går inn i det andre mediet og brytes på overgangen mellom mediene. For den brutte stråle gjelder Snells lov:

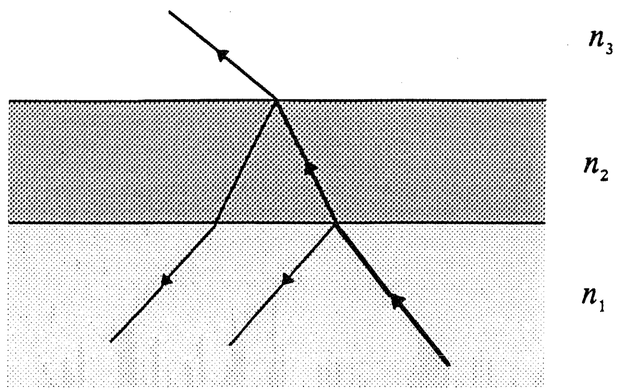
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



Dersom n_1 er større enn n_2, og θ_1 overstiger en kritisk verdi θ_c, vil alt lys bli reflektert og intet lys gå fra medium 1 til medium 2.

c) Finn θ_c (kalt kritisk vinkel) uttrykt ved n_1 og n_2 (antatt $n_1 > n_2$) !

d) En plan oljefilm (med brytningsindeks $n_2 = 1{,}50$) ligger på et plant sjikt av vann med brytningsindeks $n_1 = 1{,}33$. Hva er maksimum innfallsvinkel en lysstråle som kommer nedenfra kan ha på grenseflaten vann/olje om noe av dens lys skal kunne unnslippe (dvs. komme ut i luften som har brytningsindeks $n_3 = 1{,}00$) ?



Er svaret avhengig av verdien på brytningsindeksen n_2 (samme hva denne er så sant den er større enn 1) ? Begrunn svaret !

Vi skal til slutt betrakte en tynn, plan oljefilm (av en annen type olje enn i pkt. d) med brytningsindeks 1,30 som ligger på et plant sjikt av vann (med brytningsindeks 1,33). Vi sender nå kvitt lys tilnærmet normalt ned på denne oljefilmen. (Vi ser her bort fra at oljefilmens brytningsindeks er svakt bølgelengdeavhengig.) De eneste farger vi ser tydelig (dvs. forsterket over de andre) er rødoransje med bølgelengde ca. 645 nm og fiolett med bølgelengde ca. 430 nm.

e) Hva er tykkelsen på oljefilmen ?
(Vi er her ute etter den minste tykkelsen som oppfyller ovenstående.)

Oppgitt

- Når bølgelengden for lys i vakuum (eller luft) er λ_0, så er bølgelengden λ for det samme lyset i et stoff med brytningsindeks n gitt ved:

$$\lambda = \lambda_0 / n$$

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven betrakte en harmonisk oscillator (dvs. en partikkel som kan svinge harmonisk) som kan bevege seg i én dimensjon. (Vi skal regne kvantemekanisk.) Partikkelen har potensiell energi $\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ (når posisjonen er q) og Hamiltonoperator gitt ved:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

der $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ og q er posisjonskoordinaten. $\omega = \sqrt{k/m}$ der k er fjærkonstanten og m er partikkelmassen.

a) Vis at

$$\psi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega q^2/2\hbar}$$

er en egenfunksjon for $\hat{H}$ og finn den tilhørende egenverdien ! (Dvs. vis at $\psi_0(q)$ oppfyller den tidsuavhengige Schrödingerligningen $\hat{H}\psi_0(q) = E_0\psi_0(q)$ og finn E_0 !)

b) Beregn middelverdien $<q>$ for posisjonen q og middelverdien $<p>$ for impulsen p for tilstanden beskrevet ved $\psi_0(q)$!

For resten av oppgaven skal vi betrakte tilstanden gitt ved:

$$\Psi(q,t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\psi_0(q)\,\mathrm{e}^{-i\omega t/2} - \psi_1(q)\,\mathrm{e}^{-3i\omega t/2}\right]$$

der $\psi_0(q)$ er gitt i pkt. a og $\psi_1(q)$ er gitt ved:

$$\psi_1(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-m\omega q^2/2\hbar} \cdot \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q$$

$\psi_1(q)$ er også en egenfunksjon til $\hat{H}$ og har tilhørende egenverdi $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Det kan videre betraktes som kjent at $\psi_0(q)$ og $\psi_1(q)$ er normerte og ortogonale til hverandre.

c) Vis at $\Psi(q,t)$ er normert !

d) Beregn (for vilkårlig tid t) middelverdien av energien $<\hat{H}>$ for tilstanden beskrevet ved $\Psi(q,t)$!

e) Når tilstanden er gitt ved $\Psi(q,t)$, finn sannsynlighetene p_n for ved måling av energien E å finne verdiene $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ for vilkårlig tid t ! Kontroller (ved hjelp av sannsynlighetsregning) at det er samsvar mellom resultatet i dette punktet og resultatet i pkt. d !

f) Beregn $<q>$, $<q^2>$ og $\Delta q = \left[<q^2> - <q>^2\right]^{1/2}$ som funksjon av tiden t for tilstanden gitt ved $\Psi(q,t)$!

g) Beregn sannsynlighetstettheten for å finne posisjon q ved tid t for tilstanden gitt ved $\Psi(q,t)$!
Grunngi ut fra dette resultatet (etter å ha fått det på passe form) hvorfor $<q>$ er tidsavhengig mens $<q^2>$ ikke er det !

Oppgitt

- Middelverdien $<F>$ for en fysikalsk observerbar størrelse F er gitt ved:

$$<F> = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, d\tau$$

der $\hat{F}$ er operatoren tilsvarende F, og integralet er et bestemt integral som skal taes over det aktuelle rommet.

- Anta at en tilstand er beskrevet ved Ψ, og at Ψ ved tid t er gitt ved:

$$\Psi = \sum_n b_n(t)\varphi_n$$

der φ_n er de ortonormale egenfunksjonene til en operator $\hat{F}$ med tilhørende egenverdier f_n (dvs. $\hat{F}\varphi_n = f_n\varphi_n$). Da er sannsynligheten for å finne verdien f_n når en måler den fysiske størrelsen F (tilsvarende $\hat{F}$) gitt ved $|b_n(t)|^2$.

- Dersom en tilstand er gitt ved en bølgefunksjon $\chi(q)$, så er sannsynlighetstettheten for å finne posisjon q gitt ved $|\chi(q)|^2$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$