Oppgave 1

a) Newtons 2. lov gir

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

hvor F for tilstrekkelig små utsving er gitt ved Hooks lov, hvilket gir at

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad (1)$$

hvor $\omega = \sqrt{k/m}$ (2)

Q.E.D.

b) Forskyvningen av likevekts posisjonen fra $x=0$ til $x=x_0$ er gitt ved

$$kx_0 = F_g = mg$$

som gir:

$$\underline{\underline{k = mg/x_0}} \qquad (3)$$

c) Gitt at (1) har generell løsning

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Konstantene A og φ kan da bestemmes ved hjelp av initialbetingelsene:

$$x(0) = x_0 \qquad (5a)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \qquad (5b)$$

(4), (5a) og (5b) gir

$$X_0 = A\cos\varphi \qquad (6a)$$

$$0 = -\omega A\sin\varphi \qquad (6b)$$

Likningssettet (6a) & (6b) gir ved løsning for A og φ:

$$A = X_0 \quad \text{og} \quad \varphi = 0$$

som innsatt i (4) gir posisjonen X s.f.a. t.
Bruker vi (2) og (3) kan X uttrykkes ved

$$X = X_0\cos(\omega t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\,t\right) \qquad (7)$$

Passering av likevektsposisjonen $X=0$ finner sted for $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\,t\right) = 0$ $\therefore$ $\sqrt{\frac{g}{X_0}}\,t = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, 5 \ldots$

Altså:

$$t = n\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{X_0}{g}}, \quad n = 1, 3, 5 \ldots$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\underline{\underline{t = n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0.010}{9.8}}\ \mathrm{s} \simeq n\cdot 0.05\ \mathrm{s}, \quad n = 1, 3, 5 \ldots}}$$

d) Fra (7) får vi:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{gX_0}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\,t\right) \qquad (8)$$

og

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -g\cos\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\,t\right) \qquad (9)$$

Vi har maksimal akselerasjon for

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-g\cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}}t\right)\right) = \sqrt{\frac{g^3}{x_0}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}}t\right) = 0$$

Altså for:

$$\sqrt{\frac{g}{x_0}}t = n\pi, \quad n = 0,1,2,3\ldots, \quad \text{d:} \quad t = n\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}, n = 0,1,2..$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\underline{\underline{t = n\pi\sqrt{\frac{0.010}{9.8}}\,s = n \cdot 0.1\,s, \quad n = 0,1,2,3\ldots}}$$

Total energien er generelt gitt ved

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

Siden total energien er bevart under oscillasjonen vil vi ha at

$$E = E_{k,max} = E_{p,max}.$$

Vi velger å løse problemet v.h.a. den siste relasjonen

$$E = E_{p,max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

som v.h.a. (3) kan skrives:

$$\underline{\underline{E = \frac{1}{2}mgx_0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E = \frac{1}{2}(0.010 \cdot 9.8 \cdot 0.010)\,kg\frac{m}{s^2}\cdot m = \underline{\underline{0{,}49\,mJ}}$$

e) Vi setter opp Newtons 2. lov analogt med hva vi gjorde i pkt a)

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx + mg \qquad (10)$$

Istedetfor variabelen x innfører vi nå den nye variabelen $x' = x - x_0$ som angir utsvinget omkring likevektsposisjonen x_0 (som ble funnet i pkt b). Innsatt i (10) får vi

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -k(x'+x_0) + mg$$

som v.h.a (3) kan uttrykkes

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -kx' - k\frac{mg}{k} + mg = -kx' \qquad (11)$$

som er samme likning som (1) og derfor har løsning

$$x' = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (12)$$

med $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$ som før (jfr. (2) og (3))

Setter vi inn $x' = x - x_0$ får vi

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}}t + \varphi\right) + x_0 \qquad (13)$$

Vi ser at oscillatoren svinger akkurat likt om likevekts posisjonen i vertikal retning som den gjorde i horisontal retning, men likevekts posisjonen er altså forandret fra $x = 0$ til $x = x_0$.

Oppgave 2

a) Av figuren i oppgaveteksten ser vi at gangl engdeforskjellen mellom stråler fra S_1 og S_2 til P er $d \sin\theta$. Vi får da konstruktiv interferens, dvs sentrum i de lysstripene eller lysmaksima for:

$$d \sin\theta = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dvs. for bøyningsvinkler θ gitt ved

$$\underline{\underline{\sin\theta = n\frac{\lambda}{d}}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Med $\lambda = 500\,\text{nm}$ og $d = 50\,\mu\text{m}$ gir (1):

$$\sin\theta = n \cdot 0{,}01 \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Siden $\sin\theta$ maksimalt kan være 1 får vi altså lysmaksima for θ gitt ved:

$$\underline{\underline{\sin\theta = n \cdot 0{,}01}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm 100 \qquad (2)$$

b) Totalt felt E_θ i pkt. P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2$$

$$= E_0 \{ \cos(kr - \omega t - \varphi) + \cos[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi] \} \quad (3)$$

Oppgitt:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (4)$$

(4) i (3) med $a = kr - \omega t - \varphi$ og $b = k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi$

gir:

$$E_\theta = 2 E_0 \cos\left(k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi\right) \cos\left(-\frac{k \Delta r}{2}\right) \quad (5)$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (6)$$

Definerer:

$$\delta \equiv k d \sin \theta = k \Delta r \quad (7)$$

(6) og (7) innsatt i (5) gir:

$$E_\theta = \underbrace{2 E_0 \cos \frac{\delta}{2}}_{\equiv E_{\theta_0}} \cos\left(k(r + \Delta r/2) - \omega t - \varphi\right) \quad (8)$$

$$= E_{\theta_0} \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad (9)$$

der vi har definert

$$\varphi_1 = k(r + \Delta r/2) - \varphi \qquad (10)$$

For et gitt pkt. P. er φ_1 konstant og iflg det oppgitt får vi da:

$$I_\theta = \varepsilon_0 c_0 \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 E_{\theta_0}^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 \left(2 E_0 \cos \frac{\delta}{2}\right)^2 = 2 \varepsilon_0 c_0 E_0^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \qquad (11)$$

For $\theta = 0$

$$I_0 = 2 \varepsilon_0 c_0 E_0^2 \qquad (12)$$

og dermed:

$$\underline{\underline{I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \qquad \text{q.e.d.} \qquad (13)$$

Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad (14)$$

dvs når:

$$\frac{kd \sin\theta}{2} = m\pi$$

eller (med $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) for:

$$\underline{\underline{\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}}} \qquad m = 0, \pm 1 \pm 2 \ \ldots \qquad (15)$$

som er det samme som vi fikk i pkt. a.

c) Interferensmønsteret når $\theta = 0$ vil ikke bli påvirket av at $L_c = 5\mu m$ i stedet for at $L_c = \infty$, fordi gangelengdeforskjellen ($d \sin\theta$) fra S_1 og S_2 til observasjonsskjermen B da er vesentlig mindre enn L_c. Siden L_c ikke påvirker middelbølgelengden vil ikke posisjonen til intensitetsmaksima bli endret verken for små eller store θ. Men når $d \sin\theta$ blir av samme størrelsesorden som L_c

dvs når:

$$d \sin\theta \simeq \pm L_c$$

eller:

$$\sin\theta \approx \pm\frac{L_c}{d} = \pm\frac{5\mu m}{50\mu m} = \pm 0,1 \qquad (16)$$

begynner det å bli mindre kontrast mellom lyse og mørke striper. Når $\sin\theta$ nærmer seg ± 1 vil veglengdeforskjellen nærme seg 50 µm dvs. $10 L_c$, og lys fra S_1 og S_2 er da tilnærmet inkoherent med hverandre og stripemønsteret utvisket.

d) Det lyset som går gjennom glassplaten og S_2 vil bli forsinket i forhold til det lyset som går gjennom S_1. Kalles tykkelsen av glassplatene b blir forsinkelsen f gitt ved:

$$f = (nb - b) = (n-1)\,b \qquad (17)$$

Tilfelle I

$$f = (1{,}50 - 1{,}00) \cdot 500\,\text{nm} = 250\,\text{nm} = \tfrac{1}{2} \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin\theta = (n - \tfrac{1}{2})\lambda \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \qquad (18)$$

Dvs. vi får maksima der vi hadde minima uten glass og omvendt

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin\theta_I = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{d} = -0{,}005 \qquad (19)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_I$ som den gjorde på begge sider $\sin\theta = 0$ uten glass.
(Dette forventes ikke for å få full uttelling for tilfelle I siden det er så liten forskyvning).)

Tilfelle II

$$f = (1{,}50 - 1{,}00)\ 1000\,\text{nm} = 500\,\text{nm} = \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin\theta = (n - 1)\lambda \qquad n = 0, \pm 1\ \pm 2 \cdots \qquad (20)$$

Dvs vi får lysmaksima og lysminima der vi hadde det uten glass.

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin \theta_{II} = -\frac{\lambda}{d} = -0{,}01 \qquad (21)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin \theta_{II}$ som den gjorde på begge sider av $\sin \theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full utteling for tilfelle II siden det er så liten forskyvning.))

Tilfelle III

$$f = (1{,}50 - 1{,}00) \cdot 30\mu m = 15\mu m = 30\lambda m$$

Sentrum i det synlige interferens-mønsteret vil nå være gitt ved:

$$\sin\theta_{\text{III}} = -30\frac{\lambda}{d} = -0,30 \qquad (22)$$

og de vinklene der interferensmønsteret begynner å bli utydelig finnes der gangleng deforskjellen er $l_c = 10\lambda$ forskjellig fra ~~økt~~ gitt ved ligu.(22), dvs: når:

$$\sin\theta = \frac{-30\lambda \pm 10\lambda}{d}$$

dvs når:

$$\sin\theta = \begin{cases} -0,2 \\ -0,4 \end{cases} \qquad (25)$$

(I den grad lysmaksima kan sees på samme sted som uten glass vil de ha samme posisjon som disse, men vi har altså ikke tydelige lysmaksima på samme sted som når vi ikke har glass foran S_2)

Tilfelle 4 $b = 1000 \mu m$

$$f = (1{,}50 - 1{,}00) \cdot 1000 \mu m = 500 \mu m = 100 L_c$$

Den minste optiske veilengdeforskjell vi da kan få på skjermen er

$$f - d = 500 \mu m - 50 \mu m = 450 \mu m$$

$$= 90 L_c$$

Dvs at intet lys fra S_1 som er blandet koherent med lys fra S_2 kan møtes på noe punkt på observasjonsskjermen B. Vi får derfor bare en jevn lysfordeling på denne og intet interferensmønster.

Oppgave 3

a) $\hat{H}_1 \psi_0(q) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right) \psi_0(q)$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right) \psi_0(q) \qquad (1)$$

Vi beregner først:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\psi_0(q) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}_{\equiv A} \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= A\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{m\omega q}{\hbar} e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= A\left(-\frac{m\omega}{\hbar} e^{-m\omega q^2/2\hbar} + \frac{m^2\omega^2 q^2}{\hbar^2} e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right) e^{-m\omega q^2/2\hbar} \qquad (2)$$

(2) innsatt i (1) gir:

$$\hat{H}_1 \psi_0(q) = \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right)\psi_0(q)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(q) \qquad (3)$$

som betyr at $\psi_0(q)$ er egenfunksjon for $\hat{H}_1$ q.e.d.

Den tilhørende egenverdien er $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

b) En generell løsning av den tidsavhengige Schrödingerligningen for dette problemet er (oppgitt):

$$\Psi(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(q) e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (4)$$

Dersom tilstanden ved $t=0$ er gitt ved $\psi_0(q)$ får vi da:

$$\Psi_0(q,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(q) = \psi_0(q) \qquad (5)$$

som gir:

$$c_n = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0$$

$$c_0 = 1$$

og dermed:

$$\underline{\underline{\Psi_0(q,t) = \Psi_0(q,t) = \psi_0(q) e^{-iE_0 t/\hbar}}} \qquad (6)$$

Denne tilstanden er stasjonær fordi

1) $\rho(q,t) = |\Psi_0(q,t)|^2 = |\psi_0(q)|^2$ er uavh. t.

og:

2) $$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0^*(q,t) \hat{F} \Psi_0(q,t)\, dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(q) e^{iE_0 t/\hbar} \hat{F} \psi_0(q) e^{-iE_0 t/\hbar}\, dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(q) \hat{F} \psi_0(q)\, dq$$

for enhver fysisk störrelse F (som ikke er eksplisitt tidsavhengig) er tidsuavhengig.

c) $\hat{H}_2(q)\chi(q) = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(q-q_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right]\chi(q)$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(q-q_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right]\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega(q-q_0)^2/2\hbar} \quad (7)$$

Vi innfører koordinat-transformasjonen $\tilde{q} = q - q_0$. Siden $\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}$ får vi fra (7) ved sammenligning med (1) i pkt. a) at:

$$\hat{H}_2(q)\chi(q) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{q}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right]\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega\tilde{q}^2/2\hbar}$$

$$= \hat{H}_1(\tilde{q})\psi_0(\tilde{q}) - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\,\psi_0(\tilde{q}) \quad (8)$$

(8) gir sammen med (3) i pkt a) at:

$$\hat{H}_2(q)\chi(q) = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(\tilde{q}) - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\,\psi_0(\tilde{q})$$

$$= \left[\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right]\psi_0(\tilde{q}) = \left[\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right]\chi(q) \quad (9)$$

som betyr at $\chi(q)$ er en egenfunksjon til $\hat{H}_2$ med egenverdi $\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2$ q.e.d.

Dette resultatet kunne også vært utledet ved direkte utregning analogt fremgangsmåten i pkt. a) ovenfor.

d) $\chi(q)$ er en symmetrisk fordeling om q_0. $|\chi(q)|^2 = (\chi(q))^2$ (som er sannsynlighetstettheten for å finne posisjonen q) er derfor også symmetrisk fordelt om q_0. Vi må derfor ha for middelverdien av posisjonen $\langle q \rangle$:

$$\underline{\underline{\langle q \rangle = q_0}} \qquad (10)$$

e) Sannsynlighetene p_n er gitt ved:

$$p_n = |c_n e^{-iE_nt/\hbar}|^2 = |c_n|^2$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{n!}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, q_0\right)^{2n} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q_0^2}}} \qquad (11)$$

og altså uavhengige av t.

$\Psi(q,t)$ beskriver likevel <u>ikke</u> en stasjonær tilstand fordi ∞ mange

$c_n \neq 0$ og f.eks $\rho(q,t) = |\Psi(q,t)|^2$

inneholder ∞ mange kryssledd som er

tidsavhengige.

f) $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E_n$ og alle p_n

er tidsuavhengige. $\langle E \rangle$ er dermed

tidsuavhengig.

Ved $t = 0+$ har vi $\langle q \rangle = q_0 \neq 0$.

og $\rho(q) = |\chi(q)|^2$ symmetrisk fordelt

om $q = q_0 \neq 0$. Potensialet er

fra $t = 0+$ fordelt symmetrisk om

$q = 0$. $\langle q \rangle$ er en fysikalsk

størrelse som i prinsipp kan måles. Siden

$\langle q \rangle$ ved $t = 0+$ er ulik 0 og

potensialet er symmetrisk om $q = 0$

må $\langle q \rangle$ forandres m.h.t. tiden.

Hvis ikke ville kvantemekanikken gi at middelverdien av posisjonen var slik at fjøra i middel var strekt (eet sammentrykt) uten at noe beveget seg og uten at noen krefter holdt den strekt (Vi betrakter en fri svingning) og det er klart ufysikalsk. (Det vi har gjort ovenfor forutsetter ikke noen begrensning på q_0 og det må derfor også holde for q_0 av makroskopisk størrelse og vil da beskrive en oscillator som er strekt en avstand q_0 fra likevektsposisjonen og så sluppet. Det er klart at vi da må få en svingning og ikke en stasjonær tilstand).