Løsningsforslag, Eksamen i 74125 FYSIKK 23/8-95

Løsningsforslag Oppgave 1

a) Viser at venstre og høyre side av likn. (1) (i oppgave teksten) blir like ved innsetting av D(x,t) gitt ved (2) (i oppgaveteksten).

VS: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_M \cos[k(x-vt)+\varphi] = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x} D_M \cos[k(x-vt)+\varphi]\right\}$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{-(kD_M)\sin[k(x-vt)+\varphi]\right\} = -k^2 D_M \cos[k(x-vt)+\varphi]$

HS: $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_M \cos[k(x-vt)+\varphi] = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t} D_M \cos[k(x-vt)+\varphi]\right\}$

$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}(-(-kv) D_M \sin[k(x-vt)+\varphi]) = -\frac{1}{\cancel{v^2}}\cancel{v^2}k^2 D_M \cos[k(x-vt)+\varphi]$

Q.E.D.

b) $u(x,t) = \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = kvD_M \sin[k(x-vt)+\varphi]$ (1)

$\tan\vartheta = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} = -kD_M \sin[k(x-vt)+\varphi]$ (2)

i) $D = D_M \cos[k(x-vt)+\varphi] = 0$ og $u = \omega D_M \sin[k(x-vt)+\varphi] > 0$

$\Downarrow$

$k(x-vt)+\varphi = \frac{\pi}{2} + n\,2\pi, \quad n = 0,1,2,\dots$

og

$$\boxed{u = kvD_M \quad , \quad \vartheta = \arctan(-kD_M)}$$

ii) $D = D_M \cos(k(x-vt)+\varphi) = +D_M$

$\Downarrow$

$k(x-vt)+\varphi = n\cdot 2\pi, \quad n = 0,1,2,\dots$

og

$$\boxed{u = 0 \quad , \quad \vartheta = 0}$$

iii) $D = D_M \cos[k(x-vt)+\varphi] = 0$ og $u = \omega D_M \sin[k(x-vt)+\varphi] < 0$

$\Downarrow$

$k(x-vt)+\varphi = \frac{3\pi}{2} + n\,2\pi, \quad n = 0,1,2,\dots$

og

$$\boxed{u = -kvD_M \qquad \vartheta = \arctan(kD_M)}$$

iv) $D = D_M \cos[k(x-vt)+\varphi] = -D_M$

$\Downarrow$

$k(x-vt)+\varphi = \pi + n\cdot 2\pi \qquad n = 0,1,2,\dots$

og

$$\boxed{u = 0 \qquad \vartheta = 0}$$

Fra likn. (1) og (2) ser vi at:

$$\underline{\underline{u(x,t)}} = -v\{-kD_M \sin[k(x-vt)+\varphi]\} = \underline{\underline{-v\tan\vartheta(x,t)}}$$

c) "Startbetingelsene" gir:

$D(0,0) = D_0 = D_M \cos\varphi$ (3)

$u(0,0) = u_0 = \sqrt{3}kvD_0 = kvD_M \sin\varphi$ (4)

(4) dividert på (3) gir at

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \sqrt{3}$$

Da D_0 og D_M er forutsatt å være positive, følger det av (3) og (4) at φ må ligge i 1. kvadrant.

Altså: $\varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Ved innsetting av fasevinkelen i (3) finner vi

$$\boxed{D_M = 2D_0} \qquad (5)$$

Ser fra (1) at $u_M = kVD_M$, som ved innsetting for D_M fra (5) gir:

$$\boxed{u_M = 2kVD_0}$$

Ser fra (2) at $\tan\vartheta_M = kD_M$ som ved innsetting for D_M fra (5) gir:

$$\boxed{\vartheta_M = \arctan(2kD_0)}$$

Vi har funnet faseinkelen $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Utsvinget for streng-elementet med posisjon $x = 0$ blir da:

$$D(0,t) = 2D_0\cos\left[-kVt + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\overset{\omega = kV}{=} 2D_0\cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 2D_0\cos\left(-\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2D_0\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{6}\right)\right]$$

Vi ser at:

$$D(0,t) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{t}{T} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \quad n = 0, \pm1, \pm2 \dots$$

den laveste positive verdi av t som oppfyller likningen svarer til $n = 0$, og er gitt ved:

$$\boxed{t = \frac{5}{12}T}$$

d) $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kV} = \frac{2\pi}{6{,}0\,m^{-1}\cdot 9{,}0\,m/s} \cong \underline{\underline{0.12\ s}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6{,}0\,m^{-1}} = \underline{\underline{1{,}0\ m}}$$

$$F_T = \mu V^2 = 0.10\,kg/m\cdot(9{,}0\,m/s)^2 = \underline{\underline{8.1\ N}}$$

$$D_M = 2D_0 = 2\cdot 5{,}0\ cm = 10\ cm = \underline{\underline{0{,}10\ m}}$$

$$u_M = 2kVD_0 = 2\cdot 6{,}0\,m^{-1}\cdot 9{,}0\,m/s\cdot 0{,}050\,m = \underline{\underline{5{,}4\ m/s}}$$

$$\vartheta_M = \arctan(2kD_0) = \arctan(2\cdot 6{,}0\,m^{-1}\cdot 0{,}050\,m) = \underline{\underline{31^\circ}}$$

e) Strekk-kraften i strengen må være den samme for $x > 0$ og $x < 0$. Dette gir

$$F_T = \mu'(V')^2 = \mu V^2 \Rightarrow \boxed{V' = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\,V} \qquad (6)$$

Bølgen har samme vinkelfrekvens for $x > 0$ og $x < 0$. Dette gir:

$$\omega = V'k' = Vk$$

$$\overset{(6)}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\,V k' \Rightarrow \boxed{k' = \sqrt{\frac{\mu'}{\mu}}\,k} \qquad (7)$$

For $x = 0$ må vi ha:

$$D^I(0,t) + D^R(0,t) = D^T(0,t)$$

$$\Rightarrow D_M^I\cos(-k'v't + \varphi) + D_M^R\cos(k'v't - \varphi) = D_M^T\cos(-kvt + \varphi)$$

$$\Rightarrow D_M^I + D_M^R = D_M^T \qquad (8)$$

[fordi $k'v' = kV$ og $\cos x = \cos(-x)$]

For $x = 0$ må vi også ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D^I(x,t) + D^R(x,t)\right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} D^T(x,t)\Big|_{x=0}$$

$$\Rightarrow -k' D_M^I \sin(-k'v't+\varphi) - k' D_M^R \sin(k'v't-\varphi) = -k D_M^T \sin(-kvt+\varphi)$$

$$\Rightarrow -k' D_M^I + k' D_M^R = -k D_M^T \quad (\text{fordi } k'v' = kv \text{ og } \sin x = -\sin(-x))$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} \quad D_M^I - D_M^R = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\, D_M^T \qquad (9)$$

(8)+(9) gir:

$$\boxed{\begin{aligned} D_M^I &= \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\mu/\mu'}\right) D_M^T \\ D_M^R &= \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\mu/\mu'}\right) D_M^T \end{aligned}} \qquad (10)$$

f) Total utsving for $x < 0$:

$$D'(x,t) = D^I(x,t) + D^R(x,t) = D_M^I \cos[k'(x-v't)+\varphi] + D_M^R \cos[k'(x+v't)-\varphi]$$

Vi tenker oss at $D^I(x,t)$ kan deles opp i to delbølger hvorav den enes amplitude er lik absoluttverdien av den reflekterte bølges:

$$D'(x,t) = D_1^I(x,t) + D_2^I(x,t) + D^R(x,t)$$

$$= \left(D_M^I - |D_M^R|\right) \cos[k'(x-v't)+\varphi]$$

$$+ |D_M^R| \cos[k'(x-v't+\varphi)] + D_M^R \cos[k'(x+v't)-\varphi] \qquad (11)$$

Setter vi inn for D_M^I og D_M^R fra (10) i (11) får vi

$$D'(x,t) = \left\{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\mu/\mu'}\right)D_M^T - \tfrac{1}{2}\left|\left(1-\sqrt{\mu/\mu'}\right)D_M^T\right|\right\} \cos[k'(x-v't)+\varphi]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left|\left(1-\sqrt{\mu/\mu'}\right)D_M^T\right| \cos[k'(x-v't+\varphi)] + \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\mu/\mu'}\right)D_M^T \cos[k'(x+v't)-\varphi]$$

(12)

Vi har i denne oppgaven forutsatt at $\mu' < \mu$. Ellers har vi også at den transmitterte og innkommende bølge alltid vil være i fase. Dersom D_M^I regnes positiv, vil derfor også D_M^T være det. Brukes disse opplysningene kan (12) omformes til:

$$D'(x,t) = \tfrac{1}{2}D_M^T\left\{\left(1+\sqrt{\mu/\mu'}\right) - \left(\sqrt{\mu/\mu'}-1\right)\right\} \cos[k'(x-v't)+\varphi]$$

$$+ \tfrac{1}{2}D_M^T\left(\sqrt{\mu/\mu'}-1\right) \cos[k'(x-v't+\varphi] + \tfrac{1}{2}D_T\left(1-\sqrt{\mu/\mu'}\right)\cos[k'(x+v't)-\varphi]$$

$$= D_M^T \cos[k'(x-v't)+\varphi]$$

$$+ \tfrac{1}{2}D_M^T\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{\mu'}}-1\right)\left\{\cos[k'(x-v't)+\varphi] - \cos[k'(x+v't)-\varphi]\right\}$$

$$= D_M^T \cos[k'(x-v't)+\varphi]$$

$$+ \tfrac{1}{2}D_M^T\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{\mu'}}-1\right)\left\{\cos[k'(x-v't)+\varphi] + \cos[k'(x+v't)-\varphi+\pi]\right\}$$

(hvor vi har brukt at $-\cos x = \cos(x+\pi)$)

Dette uttrykket kan omformes videre v.h.a. den trigonometriske relasjonen $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$$D'(x,t) = \underbrace{D_M^T \cos[k'(x-v't)+\varphi]}_{\text{Vandrebølge}} + \underbrace{D_M^T\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{\mu'}}-1\right)\cos\left(k'x+\tfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(-k'v't+\varphi-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\text{stående bølge}} \qquad (13)$$

$D'(x,t)$ må ha sitt største maksimale utsving der den stående bølgen har sitt maksimale utsving. Dette kan innses på følgende vis: Betingelsen for maks utsving for den stående bølgen er at D_2^I og D^R er i fase med hverandre. Da D_1^I alltid er i fase med D_2^I, vil alle 3 delbølgene i (11) være i fase i et slikt punkt. Altså finner vi $x_n^{maks}(<0)$ ved betingelsen:

$$\cos(k'x_n^{maks} + \frac{\pi}{2}) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x_n^{maks} = \frac{-n\pi - \frac{\pi}{2}}{k'} = \frac{\pi(-n - \frac{1}{2})}{2\pi}\lambda'$$

$$= -\frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\lambda', \quad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (14)$$

Tilsvarende finnes de minste maksimal utsvingene for $D'(x,t)$ der den stående bølgen har knutepunkter. Dette kan innses som følger: I knutepunkter må D_2^I og D^R være i motfase, og således "nulle ut" hverandre. Da D_1^I er i fase med D_2^I vil ikke maks. resultant-amplitude kunne være mindre enn i et slikt punkt. Posisjonene X_n^{min} er bestemt ved

$$\cos(k'X_n^{min} + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_n^{min} = \frac{-(\frac{\pi}{2} + n\pi) - \frac{\pi}{2}}{k'} = -\frac{\pi n}{2\pi}\lambda'$$

$$= -\frac{n}{2}\lambda', \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (15)$$

Antar at

$$D'(0,0) = D^I(0,0) + D^R(0,0) = D^T(0,0) = D_0$$

og

$$\left.\frac{\partial D'(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial D^I(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial D^R(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial D^T(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}$$

$$= v_0 = \sqrt{3}\,kv\,D_0$$

Da $D^T(x,t) = D_M^T \cos[k(x-vt) + \varphi]$ er av samme form som utsvinget gitt i likn. (2) i oppgave teksten, må ovenstående "start-betingelser" gi samme resultat som i pkt c., nemlig at

$$D_M^T = 2D_0 \quad \text{og} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vi finner fra (13) at:

$$D'(x,t) = 2D_0 \cos[k'(x - v't) + \frac{\pi}{3}] + 2D_0(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1)\cos(k'x + \frac{\pi}{2})\cos(-k'v't - \frac{\pi}{6}) \qquad (16)$$

$$u'(x,t) = \frac{\partial D'(x,t)}{\partial t} = 2k'v'D_0 \sin[k'(x - v't) + \frac{\pi}{3}]$$

$$+ 2k'v'D_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1\right)\cos(k'x + \frac{\pi}{2})\sin(-k'v't - \frac{\pi}{6}) \qquad (17)$$

D_M' for X_n^{maks}

D_M' kan finnes ved innsetting av (14) i (16)

$$D'(x_n^{maks}, t) = 2D_0 \cos\left(-k'v't + \frac{\pi}{3} - (n + \frac{1}{2})\pi\right) -$$

$$+ 2D_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1\right)\cos\left(-(n + \frac{1}{2})\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-k'v't - \frac{\pi}{6}\right)$$

(En kan ved innsetting av $n = 0, 1, 2 \ldots$ forsikre seg om at de to leddene er i fase,)

$$D_M' = 2D_0 + 2D_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1\right) = 2D_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}$$

D'_M for X_n^{min}

Ved innsetting av (15) i (16) finner vi at

$$\underline{\underline{D'(X_n^{min}, t)}} = 2D_0 \cos\left[-k'v't + \frac{\pi}{3} - n\pi\right] \quad \text{og} \quad D'_M = \underline{\underline{2D_0}}$$

v'_M for X_n^{maks}

Ved innsetting av (14) i (17) finner vi at

$$v'(X_n^{maks}, t) = 2k'v'D_0 \sin\left(-k'v't + \frac{\pi}{3} - (n+\tfrac{1}{2})\pi\right)$$
$$+ 2k'v'D_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1\right)\cos\left(-(n+\tfrac{1}{2})\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-k'v't - \frac{\pi}{6}\right)$$

og

$$v'_M = 2k'v'D_0 + 2k'v'D_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} - 1\right) = 2k'v'D_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}$$
$$= \underline{\underline{2kVD_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}}}$$

v'_M for X_n^{min}

Ved innsetting av (15) i (17) finner vi at

$$\underline{\underline{v'_M}} = 2k'v'D_0 \sin\left[-k'v't + \frac{\pi}{3} - n\pi\right] \quad \text{og} \quad v'_M = \underline{\underline{2kVD_0}}$$

Tallverdier:

$X = X_n^{maks}$:

$$D'_M = 2D_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} = 2 \cdot 0{,}05\,m \cdot \sqrt{\frac{0.10}{0.060}} = \underline{\underline{0.13\ m}}$$

$$v'_M = 2kVD_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} = 2 \cdot 6.0\,m^{-1} \cdot 9.0\,m/s \cdot 0.05\,m\sqrt{\frac{0.10}{0.060}} = \underline{\underline{7.0\ m/s}}$$

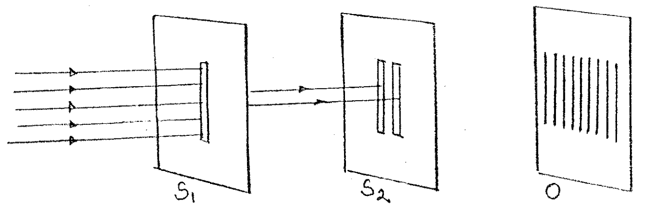
$X = X_n^{min}$

$$\underline{\underline{D'_M}} = 2D_0 = 2 \cdot 0.05\,m = \underline{\underline{0.10\ m}}$$

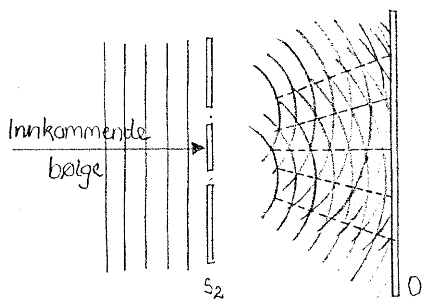
$$\underline{\underline{v'_M}} = 2kVD_0 = 2 \cdot 6.0\,m^{-1} \cdot 9.0\,m/s \cdot 0.05\,m = \underline{\underline{5{,}4\ m/s}}$$

Løsningsforslag Oppgave. 2

a) Prinsippskisse av Youngs tospalte eksperiment :



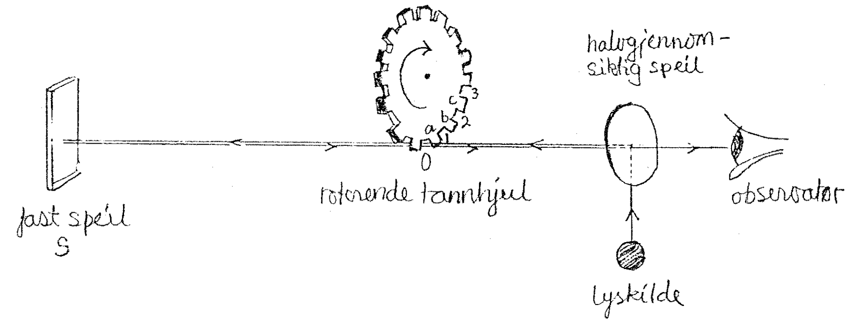
Lys fra en lyskilde (Young brukte sollys) sendes gjennom en spalte S_1 for å fremskaffe en smal strålebunt av parallelle stråler. Denne strålebunten faller på en dobbeltspalt S_2. Når avstanden mellom åpningene i dobbeltspalten er liten nok, vil vi på observasjonsskjermen O se et mønster bestående av flere linjer. Young forklarte dette som et bølge-interferens-fenomen. Følgende modell viser hvordan :



I figuren ovenfor antas innkommende lys å ha periodisk bølgenatur. Bølgen vil bli diffraktert i dobbeltspaltens åpninger og bre seg ut som to delbølger med halvsirkler som bølgefronter. De stiplede linjene i området mellom S_2 og O angir rette linjer trukket gjennom posisjonene hvor konstruktiv interferens mellom delbølgene gir maksimal amplitude for resultantbølgen. Merk spesielt at bølgemodellen gir et maksimum også rett bak "midtlysstopperen". Dette er i samsvar med hva som observeres eksperimentelt og viser at lys i en forstand må ha periodisk bølgenatur.

b) Den franske fysikeren Fizeau brukte i 1849 en apparatur med et roterende tannhjul for å måle lyshastigheten.

Prinsippskisse :

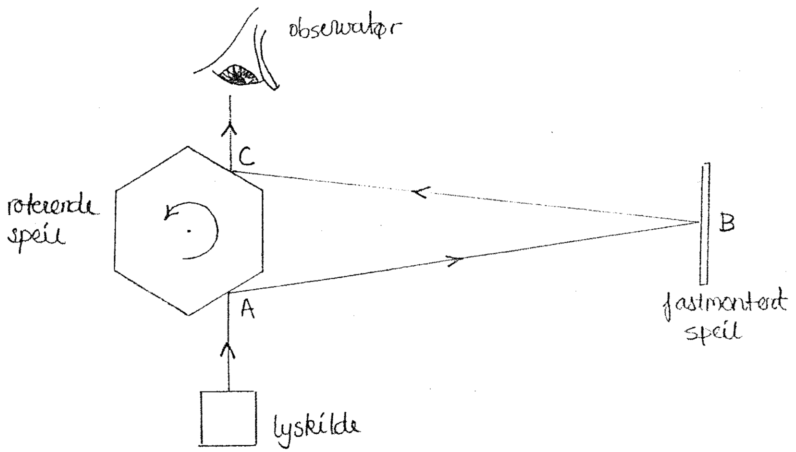


Fizeau opplinjerte apparaturen med stillestående tannhjul og økte så langsomt omløpshastigheten inntil lys som passerte gjennom en åpning O ble stanset på vei tilbake av tann a etc. Observatøren vil da ikke se noe lys. Ved den doble hastighet vil lys som passerer åpning O på vei tilbake slippe gjennom åpning 1 etc. og maksimum lysstyrke vil observeres. På grunnlag av tannhjulets rotasjonshastighet, antall tenner og avstanden mellom tannhjulet og speilet S beregnet han lyshastigheten til $3.12 \cdot 10^8$ m/s.

Fizeaus apparatur ble i løpet av de neste 80 år forbedret på ulike vis av f.eks Cornu, Young, Forbes og Michelson. Av disse er Michelsons måleoppsett holdt for å være det som gir best nøyaktighet. (I senere år har enda bedre nøyaktighet i måling av lyshastighet blitt oppnådd ved metoder basert på radiofrekvens teknikker)

Michelsons apparatur er i prinsipp nokså lik Fizeaus, bare at Michelson istedet for et roterende tannhjul benyttet et roterende mangefasettert speil. Nedenfor gis en prinsippskisse av hans oppsett fra 1926.

Prinsippskisse av A. Michelsons apparatur brukt til måling av lyshastighet ved Mt. Wilson observatoriet i 1926:



En lysstråle reflektert fra pkt A i retning speilet B, vil en tid senere treffe i punkt C. Rotasjons hastigheten til det 8-kantede speilet ble innstilt slik at speilet på denne tiden hadde rotert $\frac{1}{8}$ omdreining og lysstrålen ville da treffe observatørens øye. Litt lavere eller høyere rotasjons hastighet ville føre til at lysstrålen traff litt til sides for observatøren. På grunnlag av rotasjonshastigheten og avstanden ABC kunne da lyshastigheten beregnes. Michelson publiserte i 1926 verdien $(2{,}99796 \pm 0{,}00004)\cdot 10^8$ m/s

c) $\theta_c = \lim_{\theta_2 \to \frac{\pi}{2}} \theta_1$ eller $\sin\theta_c = \lim_{\theta_2 \to \frac{\pi}{2}} \sin\theta_1$ (1)

Snells lov gir:

$$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 \qquad (2)$$

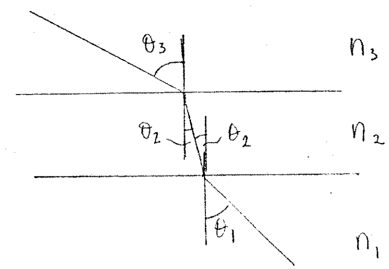
(2) innsatt i (1) gir:

$$\sin\theta_c = \lim_{\theta_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_1}\cdot 1$$

eller

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

d)



Vi har fra Snells brytningslov:

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \qquad (3)$$

og

$$n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3 \qquad (4)$$

(3) og (4) gir

$$n_1\sin\theta_1 = n_3\sin\theta_3 \qquad (5)$$

Dersom strålen såvidt skal unnslippe er θ_3 lik 90° og vi får fra (5):

$$\sin\theta_1 = \frac{n_3}{n_1} = \frac{1{,}00}{1{,}33} = 0{,}752$$

og

$$\boxed{\theta_1 = 48{,}8°}$$

Utledningen ovenfor bygger bare på at vi ikke får totalrefleksjon ved overgang medium 1 til medium 2. Så sant $n_2 > n_3 = 1$, som alltid er oppfylt, vil vi aldri få totalrefleksjon der dersom vi bare såvidt får totalrefleksjon fra medium 2 til medium 3.

e) Vi får faseforskyvning på π ved refleksjon fra begge grenseflater ($n_{luft} < n_{olje} < n_{vann}$). Betingelsen for forsterkning, dvs. konstruktiv interferens mellom strålen reflektert fra olje/luft grenseflaten og vann/olje-grenseflaten er derfor:

$$2d = m\lambda_{olje} \qquad m = 1,2,3\ldots \tag{6}$$

der λ_{olje} er bølgelengden i olje for lys som i luft har bølgelengde λ_{luft}.

Her er

$$\lambda_{olje} = \lambda_{luft}/n_{olje} \tag{7}$$

Vi har tilleggsbetingelsen at d skal ha den minste verdi som tillater forsterkning av rød-oransje lys og fiolett lys. Da rød-oransje lys har lengre bølgelengde λ^R enn fiolett lys λ^F, får vi følgende to

betingelser på d og m:

$$2d = m\lambda^R_{olje} \tag{8a}$$

$$2d = (m+1)\lambda^F_{olje} \tag{8b}$$

Løses (8a,b) m.h.p. d får vi:

$$2d = \left(\frac{2d}{\lambda^R_{olje}} + 1\right)\lambda^F_{olje}$$

$$2d\left(1 - \frac{\lambda^F_{olje}}{\lambda^R_{olje}}\right) = \lambda^F_{olje}$$

$$d = \frac{\lambda^F_{olje}}{2\left(1 - \frac{\lambda^F_{olje}}{\lambda^R_{olje}}\right)} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^F_{olje}\lambda^R_{olje}}{\lambda^R_{olje} - \lambda^F_{olje}}$$

Ved hjelp av (7) kan dette skrives:

$$d = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_{olje}}\,\frac{\lambda^F_{luft}\lambda^R_{luft}}{\lambda^R_{luft} - \lambda^F_{luft}}$$

som med tallverdiene $n_{olje} = 1.30$, $\lambda^F_{luft} = 430$ nm og $\lambda^R_{luft} = 645$ nm gir at

$$\boxed{d \cong 496 \text{ nm}}$$

(Fra likn (8a) eller (8b) ser vi at $m = 2$)

Løsningsforslag Oppgave 3

a) $$\hat{H}\psi_0(q) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)\psi_0(q) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)\psi_0(q) \qquad (1)$$

Vi beregner først:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\psi_0(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{m\omega q}{\hbar}e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}e^{-m\omega q^2/2\hbar} + \left(\frac{m\omega q}{\hbar}\right)^2 e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)e^{-m\omega q^2/2\hbar} \qquad (2)$$

(2) innsatt i (1) gir:

$$\underline{\hat{H}\psi_0(q)} = \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)\psi_0(q) = \underline{\frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(q)} \qquad (3)$$

som betyr at $\psi_0(q)$ er en egenfunksjon for $\hat{H}$, q.e.d.
Den tilhørende egenverdi er $\underline{\underline{\frac{1}{2}\hbar\omega}}$.

b) $$\langle q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \psi_0^*(q)\, q\, \psi_0(q) = \int dq\, q\,|\psi_0(q)|^2$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{q}_{\text{anti-symmetrisk}}\ \underbrace{e^{-m\omega q^2/\hbar}}_{\text{symmetrisk}}}_{\text{antisymmetrisk}}\, dq = \underline{\underline{0}} \qquad (4)$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \psi^*(q)\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\psi(q)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-m\omega q^2/2\hbar}\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\left(e^{-m\omega q^2/2\hbar}\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\frac{\hbar}{i}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right) q\, e^{-m\omega q^2/\hbar} = \underline{\underline{0}} \qquad (5)$$

(benytter symmetribetraktninger tilsvarende de brukt i (4))

c) Skal vise: $\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \Psi^*(q,t)\,\Psi(q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\,dt\, |\Psi(q,t)|^2 = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\psi_0(q)e^{-i\omega t/2} - \psi_1(q)e^{-3i\omega t/2}\right]^*\left[\sqrt{2}\psi_0(q)e^{-i\omega t/2} - \psi_1(q)e^{-3i\omega t/2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \left\{2\psi_0^*(q)\psi_0(q) + \psi_1^*(q)\psi_1(q) - \sqrt{2}\left(\psi_0^*(q)\psi_1(q)e^{-i\omega t} + \psi_1^*(q)\psi_0(q)e^{i\omega t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(q)|^2 dq + \int_{-\infty}^{\infty}|\psi_1(q)|^2 dq - \sqrt{2}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*(q)\psi_1(q)\,dq - \sqrt{2}e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*(q)\psi_0(q)\,dq\right] \qquad (6)$$

Hver av de to første integralene i (6) er lik 1, fordi $\psi_0(q)$ og $\psi_1(q)$ er normaliserte. Siden $\psi_0(q)$ og $\psi_1(q)$ er ortogonale til hverandre vil de to siste integralene i (6) bli lik 0. Altså:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \Psi^*(q,t)\,\Psi(q,t) = \frac{1}{3}\left[2\cdot 1 + 1 - 0 - 0\right] = \underline{\underline{1}}$$

q.e.d.

d) $\langle \hat{H} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, \Psi^*(q,t) \, \hat{H} \, \Psi(q,t)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dq \, \Psi^*(q,t) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{H} \sqrt{2} \, \psi_0(q) e^{-i\omega t/2} - \hat{H} \psi_1(q) e^{-3i\omega t/2} \right)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dq \, \frac{1}{3} \left(\sqrt{2} \, \psi_0^*(q) e^{i\omega t/2} - \psi_1^*(q) e^{3i\omega t/2} \right)$

$\cdot \left(\frac{1}{2}\hbar\omega \sqrt{2} \, \psi_0(q) e^{-i\omega t/2} - \frac{3}{2}\hbar\omega \, \psi_1(q) \, e^{-3i\omega t/2} \right)$

$= \frac{1}{3} \left(\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega \right)$

(fordi $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_1 \, dq = 0$ og $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_0 \, dq = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_1 \, dq = 1$)

$= \underline{\underline{\frac{5}{6}\hbar\omega}}$

e) Sannsynlighetene p_n er gitt ved:

For $n = 0$:

$p_0 = \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \, e^{-i\omega t/2} \right| = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

For $n = 1$

$p_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-3i\omega t/2} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

For $n \geq 2$:

$p_n = \underline{\underline{0}} \qquad n \geq 2$

Ved hjelp av vanlig sannsynlighets-regning har vi da:

$\langle E \rangle = \langle \hat{H} \rangle$

$= \frac{2}{3} \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \hbar\omega$

$= \underline{\underline{\frac{5}{6}\hbar\omega}}$

som er i samsvar med det vi fikk i pkt. d.

f) $\langle q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \Psi^*(q,t)\, q\, \Psi(q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} q\, |\Psi(q,t)|^2 dq$

der (7)

$$|\Psi(q,t)|^2 = \frac{1}{3}\left\{2|\psi_0(q)|^2 + |\psi_1(q)|^2 - \sqrt{2}\left(\psi_0^*(q)\psi_1(q)e^{-i\omega t} + \psi_1^*(q)\psi_0(q)e^{i\omega t}\right)\right\}.$$

Da $\psi_0(q)$ og $\psi_1(q)$ er reelle har vi at $\psi_0^*(q) = \psi_0(q)$ og $\psi_1^*(q) = \psi_1(q)$. $\psi_1(q)$ kan dessuten skrives som $\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q\, \psi_0(q)$, hvilket gir at (7) kan skrives:

$$|\Psi(q,t)|^2 = \frac{1}{3}\Big\{2|\psi_0(q)|^2 + \frac{2m\omega}{\hbar} q^2 |\psi_0(q)|^2 - \sqrt{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q\, |\psi_0(q)|^2 \underbrace{\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)}_{2\cos\omega t}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{2 + \frac{2m\omega}{\hbar} q^2 - 4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q \cos\omega t\right\} |\psi_0(q)|^2 \qquad (8)$$

Altså:

$$\langle q\rangle = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2q - 4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q^2 \cos\omega t + \frac{2m\omega}{\hbar} q^3\right] |\psi_0(q)|^2 dq$$

Vi kan her bruke samme slags symmetribetraktninger som i (4): Da $|\psi_0(q)|^2$ er symmetrisk er det bare det andre leddet av integranden som vil gi bidrag. De andre leddene er antisymmetriske og vil ved integrasjon gi null:

$$\langle q\rangle = -\frac{4}{3}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\cos\omega t \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-m\omega q^2/\hbar} dq$$

$$= -\frac{4}{3}\cos\omega t \left(\frac{\hbar}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\omega}{\hbar} q^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}q^2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, dq$$

$$= -\frac{4}{3}\cos\omega t \left(\frac{\hbar}{\pi m\omega}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx}_{\sqrt{\pi}/2} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\cos\omega t}}$$

$$\langle q^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 |\Psi(q,t)|^2 dq$$

med $|\Psi(q,t)|$ innsatt fra (8) får vi:

$$\langle q^2\rangle = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2q^2 - 4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q^3 \cos\omega t + \frac{2m\omega}{\hbar} q^4\right] |\psi_0(q)|^2 dq$$

Da $|\Psi(q,t)|^2$ er symmetrisk om origo vil bare det første og tredje leddet av integranden bidra:

$$\langle q^2\rangle = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2q^2 + \frac{2m\omega}{\hbar} q^4\right) |\psi_0(q)|^2 dq$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(q^2 + \frac{m\omega}{\hbar} q^4\right) e^{-m\omega q^2/\hbar} dq$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) q^2 + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 q^4\right) e^{-m\omega q^2/\hbar}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} dq$$

$$= \frac{2\hbar}{3m\omega}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2 + x^4\right) e^{-x^2} dx \qquad (9)$$

Ved delvis integrasjon får vi at:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \quad \text{(p.g.a. symmetrisk integrand)}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, 2x\, dx = \int_0^{\infty} u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du \quad \left[\begin{array}{l}\text{Variabelbytte} \\ x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du\end{array}\right]$$

$$= \left[-u^{\frac{3}{2}} e^{-u}\right]_0^{\infty} - \left(-\frac{3}{2}\right)\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du = 0 + \frac{3}{2}\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2}\, 2x\, dx$$

$$3\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \qquad (10)$$

(10) innsatt i (9) gir :

$$\langle q^2\rangle = \frac{2\hbar}{3m\omega}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx\right]$$

$$= \frac{2\hbar}{3m\omega}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{5}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{2\hbar}{3m\omega}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{5}{6}\frac{\hbar}{m\omega}$$

Altså $\langle q^2\rangle$ er uavhengig tiden!

$$\Delta q = \left[\langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2\right]^{1/2} = \left(\frac{5}{6}\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{4}{9}\frac{\hbar}{m\omega}\cos^2\omega t\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{5\hbar}{6m\omega}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{24}{45}\cos^2\omega t\right)^{1/2}$$

g)

Sannsynlighetstettheten for å finne posisjonen q ved tiden t er gitt ved :

$$|\Psi(q,t)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\psi_0(q)e^{-i\omega t/2} - \psi_1(q)e^{-3i\omega t/2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-m\omega q^2/\hbar}\left|\sqrt{2}\,e^{-i\omega t/2} - \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q\, e^{-3i\omega t/2}\right|^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-m\omega q^2/\hbar}\left\{2 + \frac{2m\omega}{\hbar}q^2 - 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-m\omega q^2/\hbar}}_{\equiv A}\left\{\underbrace{1 + \frac{m\omega}{\hbar}q^2}_{\equiv B} - \underbrace{2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q\cos(\omega t)}_{\equiv C}\right\}$$

Leddet $A\cdot B$ er tidsuavhengig. Det er symmetrisk om $q=0$ og gir derfor 0 bidrag til $\langle q\rangle$ ($\int_{-\infty}^{\infty} q\, A\cdot B\, dq = 0$). Derimot gir leddet $A\cdot C$ bidrag til $\langle q\rangle$ og derfor må vi få :

$$\langle q\rangle \propto \cos(\omega t)$$

Leddet $A \cdot C$ er antisymmetrisk om $q = 0$. Det gir derfor ikke bidrag til $\langle q^2 \rangle$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} q^2 A \cdot C \, dq = 0 \right)$. Leddet $A \cdot B$ gir derimot bidrag til $\langle q^2 \rangle$ og derfor må vi få:

$\langle q^2 \rangle$ er uavhengig t