Fag 74125 Fysikk (for fak. IV og IX)

Eksamen 1996-05-30

Løysing

Oppgåve 1.

ⓐ $\psi = \psi_a(r) = A_a e^{-r/r_0}$

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{r_0} A_a e^{-r/r_0} = -\frac{1}{r_0}\psi$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr}\right) = -\frac{1}{r_0}\frac{d}{dr}(r^2\psi) = -\frac{1}{r_0} 2r\psi - \frac{1}{r_0} r^2 \frac{d\psi}{dr} =$$

$$= -\frac{2r}{r_0}\psi - \frac{r^2}{r_0}\left(-\frac{1}{r_0}\psi\right) = \left(\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{2r}{r_0}\right)\psi$$

Innsett i Schrödinger-likninga:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) + \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r_0 r}\right)\psi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2m_e r_0^2}\psi + \left(\frac{\hbar^2}{m_e r_0} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}\psi$$

For at Schrödinger-likninga skal vera oppfylt, er det tilstrekkeleg (og fordi $\psi(r)$ og $\frac{1}{r}\psi(r)$ er lineært uavhengige funksjonar, nödvendig) at

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m_e r_0^2} \quad \text{og} \quad \frac{\hbar^2}{m_e r_0} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 0$$

Bohr-radien: $r_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \dfrac{(2\pi\hbar)^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = \underline{\dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e}}$

Lågaste energinivå: $E_a = -\dfrac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} = -\dfrac{h^2}{8\pi^2 m_e r_0^2} = -\dfrac{h^2\pi^2 e^4 m_e^2}{8\pi^2 m_e \varepsilon_0^2 h^4} = \underline{\underline{-\dfrac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}}}$

Talverdiar:

$$r_0 = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}(6{,}63\cdot 10^{-34})^2}{\pi(1{,}6\cdot 10^{-19})^2\, 9{,}11\cdot 10^{-31}} = 5{,}29\cdot 10^{-11}\,\text{m} = 52{,}9\ \text{pm}$$

$$E_a = -\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^4\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}{8\cdot(8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34})^2} = -2{,}18\cdot 10^{-18}\,\text{J} = \underline{\underline{-2{,}18\ \text{aJ}}} \quad (= -13{,}6\ \text{eV})$$

(b)

$$\frac{1}{A_b}\psi_b = \left(2-\frac{r}{r_0}\right)e^{-r/2r_0}$$

$$\frac{1}{A_b}\frac{d}{dr}\psi_b = \left(-\frac{1}{r_0}-\frac{2}{2r_0}+\frac{r}{2r_0^2}\right)e^{-r/2r_0} = \left(-\frac{2}{r_0}+\frac{r}{2r_0^2}\right)e^{-r/2r_0}$$

$$\frac{1}{A_b}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\psi_b\right) = \frac{d}{dr}\left(\left(\frac{-2r^2}{r_0}+\frac{r^3}{2r_0^2}\right)e^{-r/2r_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{-4r}{r_0}+\frac{3r^2}{2r_0^2}+\frac{2r^2}{2r_0^2}-\frac{r^3}{4r_0^3}\right)e^{-r/2r_0}$$

$$= \left(-\frac{4r}{r_0}+\frac{5r^2}{2r_0^2}-\frac{r^3}{4r_0^3}\right)e^{-r/2r_0}$$

Innsetjing i Schrödinger-likninga og divisjon med $A_b\, e^{-r/2r_0}$ gir

$$E\left(2-\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(-\frac{4}{r_0 r}+\frac{5}{2r_0^2}-\frac{r}{4r_0^3}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

Ording av ledd etter potensar av r gir:

$$\left(\frac{4\hbar^2}{2m_e r_0}-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)r^{-1}+\left(-2E-\frac{5\hbar^2}{4m_e r_0^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)r^0+\left(E\frac{1}{r_0}+\frac{\hbar^2}{8m_e r_0^3}\right)r^1=0$$

Då dette skal gjelda for alle r, må kvar av dei tre koeffisientane vera null.

1. $\frac{4\hbar^2}{2m_e r_0}-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0}=0$ gir $r_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ dvs. som før funne. (OK.)

2. $-2E-\frac{5\hbar^2}{4m_e r_0^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=0$ gir $2E = -\frac{5\hbar^2}{4m_e r_0^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} =$

$$=\left(-\frac{5}{4}+1\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{1}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{1}{2^2}\frac{e^4 m_e}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} = -\frac{e^4 m_e}{16\varepsilon_0^2 h^2}$$

$$E = -\frac{e^4 m_e}{32\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{1}{2^2}\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{1}{2^2}E_a$$

3. $E/r_0+\frac{\hbar^2}{8m_e r_0^3}=0$ gir $E=\frac{-\hbar^2}{8m_e r_0^2}=\frac{-1}{8}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=\frac{1}{2^2}E_a$

Vilkåra (2) og (3) er oppfylte med same verdien $E=E_b=(1/4)E_a$

Altså oppfyller ψ_b Schrödinger-likninga. $E_b = -\frac{e^4 m_e}{32\varepsilon_0^2 h^2}$

Ⓒ Radiell sannsynstettleik.

$$P_a(r) = 4\pi r^2 |\psi_a(r)|^2 = \underline{|A_a|^2 4\pi r^2 e^{-2r/r_0}}$$
$$= |A_a|^2 4\pi r_0^2 \rho^2 e^{-2\rho}$$

$$P_b(r) = 4\pi r^2 |\psi_b(r)|^2 = \underline{\underline{|A_b|^2 4\pi r^2 \left(2 - \frac{r}{r_0}\right)^2 e^{-r/r_0}}}$$
$$= |A_b|^2 4\pi r_0^2 \rho^2 (2-\rho)^2 e^{-\rho} =$$
$$= |A_b|^2 4\pi r_0^2 (4\rho^2 - 4\rho^3 + \rho^4) e^{-\rho}$$

Det følgjer av definisjonen at P_a og P_b er ikkje-negative.

P_a har null som minsteverdi, nemleg for $\underline{\rho = 0}$ og for $\underline{\rho = \infty}$

P_b har også null som minsteverdi, nemleg for $\underline{\rho = 0}$, $\underline{\rho = 2}$ og $\underline{\rho = \infty}$

$$\frac{dP_a}{d\rho} = |A_a|^2 4\pi r_0^2 (2\rho - 2\rho^2) e^{-2\rho}$$ som er null for $\rho = 0$, $\rho = 1$ og $\rho = \infty$

$\frac{dP_a}{d\rho} > 0$ for $\rho < 1$ og negativ for $\rho > 1$. P_a er altså maksimal for $\underline{\underline{\rho = 1}}$

$$\left(|A_b|^2 4\pi r_0^2\right)^{-1} \frac{dP_b}{d\rho} = (8\rho - 12\rho^2 + 4\rho^3 - 4\rho^2 + 4\rho^3 - \rho^4) e^{-\rho}$$
$$= \rho(8 - 16\rho + 8\rho^2 - \rho^3) e^{-\rho}$$

Då P_b er minimum for $\rho = 2$, prøver vi å spalta av ein faktor $(\rho - 2)$

$$(-\rho^3 + 8\rho^2 - 16\rho + 8) : (\rho - 2) = -\rho^2 + 6\rho - 4$$

$$\begin{array}{l} \rho^2 - 2\rho^2 \\ \hline \quad 6\rho^2 - 16\rho + 8 \\ \quad -6\rho^2 + 12\rho \\ \hline \qquad -4\rho + 8 \\ \qquad 4\rho - 8 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$\rho^2 - 6\rho + 4 = 0$ for

$\rho = 3 \pm \sqrt{3^2 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$

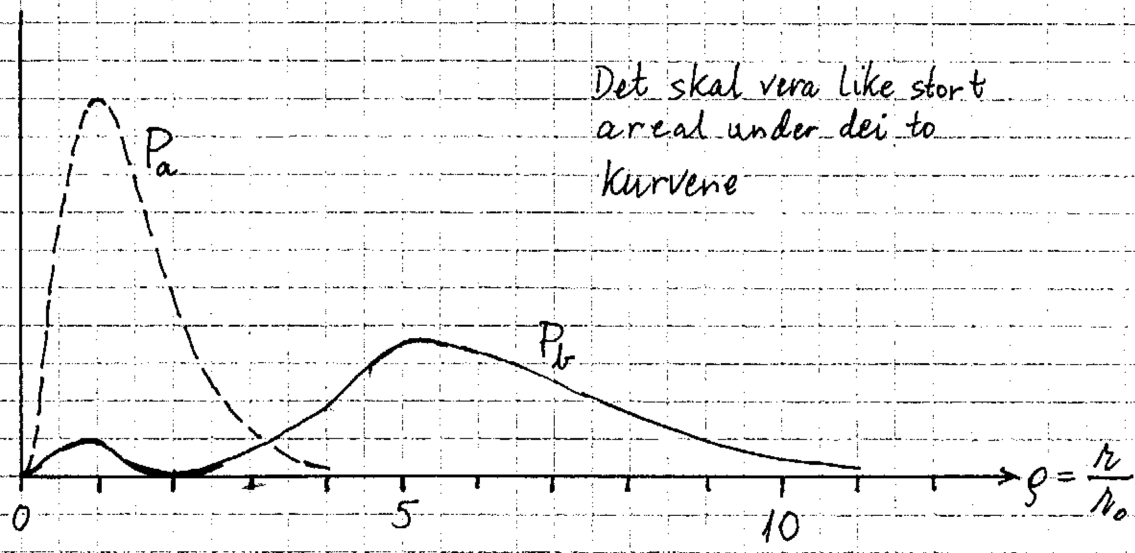
Altså er $dP_b/d\rho$ positiv for $0 < \rho < 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}7639$

negativ for $3 - \sqrt{5} < \rho < 2$, positiv for $2 < \rho < 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}2361$

og negativ for $\rho > 3 + \sqrt{5}$. D.v.s. P_b er maksimum for $\underline{\underline{\rho = 3 - \sqrt{5}}}$

og for $\underline{\underline{\rho = 3 + \sqrt{5}}}$

(d)



For $r = r_0$ er $P_a = |A_a|^2 4\pi r_0^2 e^{-2} = \frac{1}{\pi r_0^3} 4\pi r_0^2 e^{-2} = \frac{4e^{-2}}{r_0}$

$$= \frac{4e^{-2}}{5{,}3\cdot 10^{-11}\,m} = \underline{\underline{1{,}02\cdot 10^{10}\,m^{-1}}}$$

Største verdien av P_b svarar til største verdien av $|\varrho(2-\varrho)e^{-\varrho/2}|$ som hender anten for $\varrho = 3-\sqrt{5} \approx 0{,}7639$ eller for $\varrho = 3+\sqrt{5} \approx 5{,}2361$. Numerisk utrekning:

$$|\varrho(2-\varrho)e^{-\varrho/2}| = \begin{cases} 0{,}6445 & \text{for } \varrho = 0{,}7639 \\ 1{,}2360 & \text{for } \varrho = 5{,}2361 \end{cases}$$

Vi kan altså konkludera med at dei mest sannsynlege avstandane som elektronet har frå kjernen i dei to tilstandane er

$$\underline{\underline{r_a = r_0}} \qquad \underline{\underline{r_b = (3+\sqrt{5})\,r_0 \approx 5{,}24\,r_0}}$$

(e) $1 = \iiint |\psi_b|^2 dV = \int_0^\infty |\psi_b(r)|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty P_b(r)\,dr = r_0 \int_0^\infty P_b\,d\varrho =$

$$= r_0 |A_b|^2 4\pi r_0^2 \int_0^\infty (4\varrho^2 - 4\varrho^3 + \varrho^4)e^{-\varrho}\,d\varrho =$$

$$= |A_b|^2 4\pi r_0^3 (4\cdot 2! - 4\cdot 3! + 4!) = |A_b|^2 32\pi r_0^3$$

$$\underline{\underline{A_b = (32\pi r_0^3)^{-1/2}}}$$

(f) Sannsynet for at elektronet er innanfor kjernen

$$p_k = \iiint_{\text{kjernen}} |\psi|^2 dV = \int_0^{r_N} |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^{r_N} P(r)\,dr$$

$$\psi_a(0) = A_a e^{-0/r_0} = A_a = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}}$$

$$\psi_a(r_N) = A_a e^{-r_N/r_0}$$

$r_N = 1{,}10 \cdot 10^{-15}\,\text{m} \quad r_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\text{m} \qquad \frac{r_N}{r_0} = 2{,}08 \cdot 10^{-5}$

$$\psi_a(r_N) \approx A_a(1 - 2{,}08 \cdot 10^{-5}) = 0{,}99998\, A_a \approx A_a$$

$$p_k \approx |A_a|^2 \frac{4\pi}{3} r_N^3 = \frac{4\, r_N^3}{3\, r_0^3} = 1{,}199 \cdot 10^{-14} \approx \underline{\underline{1{,}20 \cdot 10^{-14}}}$$

$$\psi_b(0) = A_b 2 = 2\,(32\pi r_0^3)^{-1/2} = (8\pi r_0^3)^{-1/2}$$

$$\psi_b(r_N) = A_b 2 \left(1 - \frac{r_N}{2r_0}\right) e^{-r_N/2r_0} \approx A_b 2 \left(1 - \frac{r_N}{r_0}\right)$$

$$\approx \psi_b(0)\left(1 - \frac{r_N}{r_0}\right) = 0{,}99998\, \psi_b(0) \approx \psi_b(0)$$

Også no kan vi med god tilnærming i integranden setja $\psi_b(r) \approx \psi_b(0)$, altså

$$p_k \approx |\psi_b(0)|^2 \frac{4\pi}{3} r_N^3 = \frac{4\pi r_N^3}{3 \cdot 8\pi r_0^3} = \frac{1}{6}\left(\frac{r_N}{r_0}\right)^3 = 1{,}499 \cdot 10^{-15} \approx \underline{\underline{1{,}50 \cdot 10^{-15}}}$$

Oppgåve 2

ⓐ $$(C_c + m_0 c_0)(t_2 - t_0) = m_1 c_1 (t_1 - t_2)$$

$$t_2 = \frac{(C_c + m_0 c_0) t_0 + m_1 c_1 t_1}{C_c + m_0 c_0 + m_1 c_1} =$$

$$= \frac{(4{,}0 + 4{,}2 \cdot 50) \cdot 25 + 0{,}90 \cdot 0{,}45 \cdot 950}{4{,}0 + 4{,}2 \cdot 50 + 0{,}90 \cdot 0{,}45} = \frac{214 \cdot 25 + 0{,}405 \cdot 950}{214 + 0{,}405}$$

$$= \frac{5350 + 385}{214{,}4} = 26{,}7\ ^\circ C \approx 27\ ^\circ C$$

ⓑ $$(C_c + m_0 c_0)(t_4 - t_0) + m_3(-t_3 c_3 + l_F + t_4 c_0) = m_1 c_1 (t_1 - t_4)$$

(Varme til vatn m/kalorimeter + til isen = Varme frå stålet)

$$t_4 = \frac{(C_c + m_0 c_0) t_0 + m_3 (c_3 t_3 - l_F) + m_1 c_1 t_1}{C_c + m_0 c_0 + m_3 c_0 + m_1 c_1} =$$

$$= \frac{5350 + 9{,}0(2{,}1(-10) - 333) + 385}{214 + 9{,}0 \cdot 4{,}2 + 0{,}405} = \frac{5350 - 3186 + 385}{214 + 37{,}8 + 0{,}405} =$$

$$= \frac{2549}{252{,}2} = 10{,}1\ ^\circ C \approx 10\ ^\circ C$$

Merknad: Utrekninga starta med at vi gjekk ut frå at all isen var smelta. Denne føresetnaden viser seg å vera i orden, etter di resultatet blei ein positiv celsiustemperatur.

Tilsvarande absolutte temperaturar: $T = t + 273{,}15\ K$

$T_0 = 25 + 273{,}15 = 298{,}15\,K \approx 298\,K$

$T_1 = 950 + 273{,}15 = 1223{,}15\,K \approx 1223\,K$

$T_3 = -10 + 273{,}15 = 263{,}15\,K \approx 263\,K$

$T_2 = 26{,}75 + 273{,}15 = 299{,}90\,K \approx 300\,K$

$T_4 = 10{,}11 + 273{,}15 = 283{,}26\,K \approx 283\,K$

(c) $dS = \frac{\delta Q}{T}$

Entropiendring når tilført varme ΔQ endrar temperaturen med $\Delta T = T_2 - T_1$ på eit objekt med varmekapasitet $\mathcal{C}$

$$\Delta Q = \mathcal{C}\,\Delta T = \mathcal{C}(T_2 - T_1)$$

$$\Delta S = \mathcal{C}\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mathcal{C}\ln(T_2/T_1)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_0 = (\mathcal{C}_e + m_0 c_0)\ln\frac{T_2}{T_0}}} =$$

3,407 $$= 214 \cdot 10^3\,\frac{J}{K}\ln\frac{299,40}{298,15} = \underline{\underline{1252\ J/K}}$$

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} = \underline{\underline{-m_1 c_1 \ln\frac{T_1}{T_2}}} =$$

323 $$= -405\,\frac{J}{K}\ln\frac{1223,15}{299,90} = \underline{\underline{-569\ J/K}}$$

08 $$\underline{\underline{\Delta S_a = \Delta S_0 + \Delta S_1 = 683\ J/K}}$$

(d) $$\Delta S_0' = (\mathcal{C}_e + m_0 c_0)\ln\frac{T_4}{T_0} = \underline{\underline{-(\mathcal{C}_e + m_0 c_0)\ln\frac{T_0}{T_4}}}$$

63,57 $$= -214 \cdot 10^3\,\frac{J}{K}\ln\frac{298,15}{283,26} = \underline{\underline{-10,96 \cdot 10^3\ J/K}}$$

$$\Delta S_1' = m_1 c_1 \ln\frac{T_4}{T_1} = \underline{\underline{-m_1 c_1 \ln\frac{T_1}{T_4}}} =$$

0,44 $$= -405\,\frac{J}{K}\ln\frac{1223,15}{283,26} = \underline{\underline{-592\ J/K}}$$

$$\Delta S_3 = \Delta S_{T_3 - \text{frysepkt}} + \Delta S_{\text{smelting}} + \Delta S_{\text{frysepkt} - T_4} =$$

$$= \underline{\underline{m_3 c_3 \ln\frac{T_{frys}}{T} + m_3 \frac{L_F}{T_{frys}} + m_3 c_0 \ln\frac{T_4}{T_{frys}}}} =$$

0,71 $$= 9{,}0 \cdot 2100 \ln\frac{273,15}{263,15} + 9{,}0\,\frac{3,33 \cdot 10^5}{273,15} + 9{,}0 \cdot 4200 \ln\frac{283,26}{273,15} = \underline{\underline{13,05 \cdot 10^3\ J/K}}$$

704,91 10971,79 1373,81

1,73 $$\underline{\underline{\Delta S_b = \Delta S_0' + \Delta S_1' + \Delta S_3}} = 1495\ J/K = \underline{\underline{1,5\ kJ/K}}$$

Vedlegg til
eksamensoppgåve 30.05.96
i fag 74125 Fysikk

Oppgåve 3

Studentnr. ______
Fakultet ______
Ark nr. ______

Skriv "R", "?", eller "F" i ruta på høgre sida av påstand som er rett (R) eller feil (F).

(a)	For eit frittsvingande enkelt harmonisk svingesystem ("simple harmonic oscillator") er den naturlege frekvensen (når systemet er udempa), mindre enn den "frekvensen" som det svingar med dersom det er litt demping i systemet.	F
(b)	Gruppefarten for bølgjer på djupt vatn er halvparten av fasefarten.	R
(c)	For alle slags bølgjer gjeld det generelt at gruppefarten er mindre eller lik fasefarten.	F
(d)	Verknadsgraden er større for ein varmekraftmaskin som er reversibel enn for ein som er irreversibel.	R
(e_1)	Når lys frå ei punktforma lyskjelde som er plassert ein stad på symmetriaksen for ei sirkulær mørk skive, blir det uopplyst på motsett side av skiva, slik at det - etter geometrisk optikk - er ei kjegleflate som avgrensar den uopplyste delen av rommet frå den opplyste.	R
(e_2)	Inne i dette uopplyste rommet, går det - etter bølgjeoptikken - likevel an å finna eit godt opplyst, men svært lite, område (ein sterkt lysande flekk).	R
(f_1)	Når lys går gjennom eit optisk diffraksjonsgitter, vil avbøyingsvinkelen auka med forholdet mellom spalteavstanden d og lysbølgjelengda λ.	F
(f_2)	Oppløysingsevna for eit optisk diffraksjongitter avheng av forholdet (d/λ), men er uavhengig av kor mange spalter det er i gitteret.	F
	La det vera gitt eit krystall av tetraedrisk form. Det er så lite at det inneheld berre omlag 10^6 atom. Alle atom er silisiumatom, bortsett frå at det midt i krystallet er eit einaste arsenatom:	
(g_1)	Krystallet er ein halvleiar av p-type.	~~R~~ F
(g_2)	Dersom temperaturen er -273,15 °C (0 K), er kjernen av arsenatomet absolutt i ro midt i krystallet?	F

Følgjande overgangar melom tilstandar i eit atom er tillatne:

(h_1)	4d til 3p	R	(h_4)	3s til 2s	F	(h_7)	3s til 1p	?	(*)
(h_2)	4d til 2p	R	(h_5)	3s til 1s	F	(h_8)	2s til 1p	?	(*)
(h_3)	4d til 1s	F	(h_6)	3s til 2p	R	(h_9)	2s til 1s	F	

(i) Vi skal gå ut frå at trykket er 1 atm. eller at det endrar seg berre lite (infinitesimalt) frå 1 atm. Då gjeld: Varmekapasiteten er større ved konstant trykk enn ved konstant volum

Stoff \ Temperatur	2 °C	20 °C
luft	R	R
vatn	F	R

Skriv "R", "?", eller "F" i dei fire tomme rutene i tabellen til venstre.

(*) Det finst ikkje tilstand "1p" i atom, (fordi $l_{maks} = n-1$)