

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Alex Hansen

Tlf: 93649 57108

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK

Fakultet 4 og 9

Onsdag 20. august, 1997

kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator

Opplysninger som det kanskje kan bli bruk for, og som kandidaten selv må tolke:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$h = 2\pi \hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Tidsavhengig Schrödinger-ligning for fri partikkel:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Stasjonær tilstand:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Heisenberg's usikkerhets-relasjoner

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Bølgefunksjon for fri partikkel som kan bevege seg i x -retning

$$\phi_x(x) = e^{ikx}$$

Tilstandsligning, ideell gass

$$P = \frac{Nk_B T}{V}$$

Tilstandsligning, van der Waal's gass

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$$

Effektiviteten (virkningsgraden) til en varme-maskin

$$\epsilon = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

Effektiviteten (virkningsgraden) til en Carnot-maskin

$$\epsilon_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Symbolet Z : Tilstandssummen. Sammenheng mellom Z og noen termodynamiske størrelser:

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta F} \\ P &= k_B T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z \\ U &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ C_v &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \\ \beta &= \frac{1}{k_B T} \end{aligned}$$

Identiteter for trigonometriske funksjoner

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(y) \sin(x) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \\ n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n \end{aligned}$$

Identiteter for logaritme-funksjonen

$$\begin{aligned} \ln(A^B) &= B \ln(A) \\ \ln(AB) &= \ln(A) + \ln(B) \end{aligned}$$

Identiteter for hyperbolske funksjoner

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \sinh(y) \cosh(x) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \mp \sinh(y) \sinh(x) \\ \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \\ \cosh(x) &= \frac{1}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

Oppgave 1 (Teller 20%)

Et elektron med masse m befinner seg i en to-dimensjonal boks med sidekanter L_x og L_y langs h.h.v. x og y -retningene. Veggene i boksen antas å være uendelig harde, slik at bølgefunksjonen til systemet er begrenset til intervallene $0 < x < L_x$, og $0 < y < L_y$. Tidsuavhengig Schrödinger-ligning er

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial z^2} \right) = E \phi(x, y, z)$$

Løsningen til denne Schrödinger-ligningen oppgis å være

$$\phi(x, y, z) = \phi_x(x) \phi_y(y)$$

hvor vi har definert

$$\begin{aligned} \phi_x(x) &= \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{\pi n_x x}{L_x}\right) \\ \phi_y(y) &= \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{\pi n_y y}{L_y}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

NB! Anta at n_x, n_y er *positive* heltall.

- Formulér Pauli-prinsippet.
- Finn en formel for energi-nivåene E for systemet definert over, uttrykt ved blant annet n_x, L_x , etc.
- Sett $L_x \neq L_y$. Dersom vi har flere elektroner i boksen, hvor mange elektroner kan det *høyst* finnes seg i nest laveste energi-nivå?
- Sett $L_x = L_y = L$. Dersom vi har flere elektroner i boksen, hvor mange elektroner kan det *høyst* finnes seg i det tredje-laveste energi-nivået?

Oppgave 2 (Teller 40%)

- a) Formulér termodynamikkens 0., 1., og 2. hovedsetninger (hovedlover).
- b) Hvilke tilstandsfunksjoner identifiseres ved disse tre hovedsetningene?
- c) Formulér ekvipartisjonsprinsippet.

Et system har en partisjonsfunksjon Z definert ved

$$Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}$$

hvor E_1, E_2 er positive tall, og $E_2 - E_1 > 0$.

d) Beregn systemets fri energi F , og indre energi U . Gi en fysisk tolkning av entropien S til et system, og angi hva denne størrelsen blir i grensen $T \rightarrow 0$ for systemet over. En detaljert beregning er ikke nødvendig.

e) Finn uttrykk for systemets varmekapasitet C_v . Skisser forløpet til varmekapasiteten som funksjon av temperatur.

f) Hva blir verdien for varmekapasiteten når $T \rightarrow \infty$? Hva blir verdien av varmekapasiteten når $T \rightarrow 0$?

Oppgave 3 (Teller 40%)

a) Bølgeligningen for bølgeutbredelse i én dimensjon er gitt ved

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Forklar hva symbolene som inngår i ligningen betyr, og gi ett eksempel på et *realistisk system* som elektro-ingeniører møter, hvor en slik én-dimensjonal ligning er relevant.

b) Vis at dersom y_1 og y_2 hver for seg tilfredsstillers denne bølgeligningen, så tilfredsstillers $\alpha y_1 + \beta y_2$ samme ligning, hvor α og β er vilkårlige tall.

c) Anta at $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, og at

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= Y_0 \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= Y_0 \sin(kx - \omega t + \phi) \end{aligned}$$

hvor k er et bølgetall, ω er en vinkelfrekvens, og ϕ er en fiksert fasevinkel. Vis at $y(x, t)$ kan skrives på formen

$$y(x, t) = D(\phi) \sin[G(x, t)]$$

og angi uttrykk for D og G .

d) For hvilke verdier av ϕ opptrer maksimal konstruktiv interferens mellom y_1 og y_2 ?

e) Anta at en én-dimensjonal streng med lengde L vibrerer mens den er fastholdt i begge ender. Amplituden på svingningen til strengen $y(x, t)$ antas å være en harmonisk svingning, dvs. av formen

$$y(x, t) = Y_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

hvor k er et bølgetall og ω er en vinkelfrekvens. Finn en formel for tillatte verdier på bølgetallet k . Gi tallverdi for k (med angivelse av benevnning) når strengen er 0.97 m lang.

f) Anta at strengsystemet over istedet er slik at strengen til enhver tid er horisontal i begge ender. Hva blir nå formelen for tillatte verdier av bølgetallet k ?