NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Asle Sudbø
Tlf: 93403

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK
Fakultet 4 og 9
Onsdag 28. mai, 1997
kl. 0900-1500
Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator

Opplysninger som det kanskje kan bli bruk for, og som kandidaten selv må tolke:

$$
\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1} \\
h &= 2\pi\, \hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
k_B &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}
\end{aligned}
$$

Tidsavhengig Schrödinger-ligning for fri partikkel:

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\, \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = i\, \hbar\, \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}
$$

Stasjonær tilstand:

$$
\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}
$$

Heisenberg's usikkerhets-relasjoner

$$
\begin{aligned}
\Delta x\, \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\
\Delta t\, \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

Bølgefunksjon for fri partikkel som kan bevege seg i x-retning

$$
\phi_x(x) = e^{ikx}
$$

Tilstandsligning, ideell gass

$$
P = \frac{N k_B T}{V}
$$

Tilstandsligning, van der Waal's gass

$$
P = \frac{N k_B T}{V - Nb} - a\, \frac{N^2}{V^2}
$$

Effektiviteten (virkningsgraden) til en varme-maskin

$$\epsilon = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

Effektiviteten (virkningsgraden) til en Carnot-maskin

$$\epsilon_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Symbolet Z: Tilstandssummen. Sammenheng mellom Z og noen termodynamiske størrelser:

$$\begin{aligned}
P &= k_B T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z \\
U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\
C_v &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \\
\beta &= \frac{1}{k_B T}
\end{aligned}$$

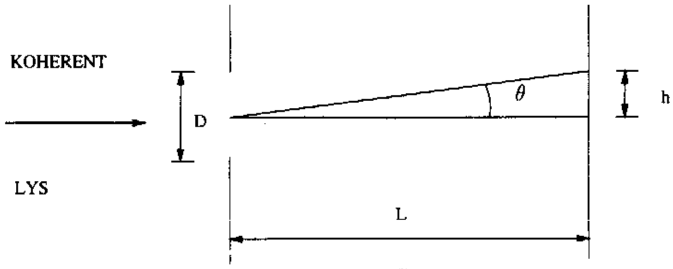
Identiteter for trigonometriske funksjoner

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\ \cos(y) \pm \sin(y)\ \cos(x) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\ \cos(y) \mp \sin(y)\ \sin(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + ... \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + ... \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3.... \cdot n
\end{aligned}$$

Identiteter for logaritme-funksjonen

$$\begin{aligned}
\ln(A^B) &= B\ \ln(A) \\
\ln(AB) &= \ln(A) + \ln(B)
\end{aligned}$$

Oppgave 1 (Teller 40%)



I figuren sendes koherent lys inn mot vegg fra venstre med bølgelengden λ. Åpningen i veggen har utstrekning D i vertikal retning og gir et interferens-mønster på skjermen. Det antas at $L \gg D$ og at $\theta \ll \pi/2$.
Tilfelle 1: Åpningen er en spalte med bredde D og uendelig utstrekning parallelt med retningen loddrett på papirplanet.
Tilfelle 2: Åpningen er sirkulær med diameter D.

Vinkelfordelingen i interferens-mønsteret på skjermen er i begge tilfellene 1 og 2 gitt på formen

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left[\frac{F(\phi)}{\phi}\right]^2 ; \ \phi = \frac{\pi\ D}{\lambda}\ \sin(\theta)$$

$$\text{Tilfelle 1}: \frac{F(\phi)}{\phi} = 0 \text{ for } \phi = 3.142,\ 6.283,\ 9.425,\ 12.566, \ldots.$$

$$\text{Tilfelle 2}: \frac{F(\phi)}{\phi} = 0 \text{ for } \phi = 3.832,\ 7.016,\ 10.173,\ 13.323, \ldots.$$

a) Forklar begrepet Fraunhofer-diffraksjon. Svar kort.

b) Definer begrepet vinkeloppløsning. Svar kort.

c) Hvilket av tilfellene 1 og 2 gir best vinkeloppløsning for gitt λ og D?

d) Det oppgis at 2. ordens minimum ligger i samme høyde h fra senterlinjen for tilfellene 1 og 2, og at D og L er gitt. I tilfelle 1 brukes lys med bølgelengde λ_1, i tilfelle 2 brukes λ_2. Beregn forholdet

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

e) Anta at i tilfellene 1 og 2 er $D = 0.0032$ m. Finn vinkeloppløsningen for tilfelle 1 når $\lambda_1 = 790 \cdot 10^{-9}$m. Hvilken λ_2 gir samme vinkeloppløsning for tilfelle 2?

f) Anta at du står ved åpningen og ser på skjermen. Skisser interferens-mønstrene du ser i tilfellene 1 og 2 på skjermen rundt senterlinjen. Ta med de to første minimaene og de tre første maximaene.

Oppgave 2 (Teller 40%)

a) Formulér termodynamikkens 0., 1., og 2. hovedsetninger (hovedlover).

b) Hvilke tilstandsfunksjoner identifiseres ved disse tre hovedsetningene?

c) Et kraftverk opererer en dampturbin som en varmemaskin mellom to varmereservoarer med fastlagte temperaturer, $T_2 = 1425$ K og $T_1 = 300$ K. Effektiviteten (virkningsgraden) til maskinen er 56%. Kraftverket får pålegg om å modifisere turbinen slik at den øker sin effektivitet med en faktor 1.28. Er dette mulig? Svaret skal *kun begrunnes* med en kort beregning.

Et system av punkt-partikler med masse m befinner seg i en boks med sidekanter L. Koordinatsystemet (X, Y, Z) for boksen er slik at $-L/2 \leq X \leq L/2$, $-L/2 \leq Y \leq L/2$, og $-L/2 \leq Z \leq L/2$. Volumet V til boksen er gitt ved $V = L^3$. Systemet befinner seg ved en temperatur T og har en energi-funksjon gitt ved

$$E(\{r_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2}{2}\, r_i^2 \right]$$

Her er $\vec{p_i}$ impulsen til partikkel i, og $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ er dens posisjon. Dette er en samling av N harmoniske oscillatorer, *som alle er festet midt inne i boksen* ($X = 0, Y = 0, Z = 0$) *med hver sin fjær* med fjærkonstant $k = m\,\omega^2$, hvor ω er en vinkel-frekvens. Volumet partiklene befinner seg i er meget stort, slik at $L/2$ er mye større enn typiske utsving av de harmoniske oscillatorene. Tilstandssummen Z til systemet er da gitt ved, i meget god tilnærmelse (**dette skal ikke vises!**)

$$Z = \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

d) Formulér ekvipartisjonsprinsippet.

e) Finn uttrykk for indre energi U og varmekapasitet C_v til systemet definert over. Numeriske svar kreves ikke. Er resultatene i overensstemmelse med ekvipartisjonsprinsippet? Begrunn svaret kort.

f) Gi en mikroskopisk tolkning av trykket i en gass. Finn trykket P til systemet definert over. Er resultatet i overensstemmelse med den mikroskopiske tolkning av trykk? Begrunn svaret kort.

Oppgave 3 (Teller 20%)

Et elektron med masse m befinner seg i en tre-dimensjonal boks med sidekanter L_x, L_y, og L_z langs h.h.v. x, y og z-retningene. Veggene i boksen antas å være uendelig harde, slik at bølgefunksjonen til systemet er begrenset til intervallene $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$, og $0 < z < L_z$. Tidsuavhengig Schrödinger-ligning er

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2}\right) = E\ \phi(x,y,z)$$

Løsningen til denne Schrödinger-ligningen oppgis å være

$$\phi(x,y,z) = \phi_x(x)\ \phi_y(y)\ \phi_z(z)$$

hvor vi har definert

$$\begin{aligned}
\phi_x(x) &= \sqrt{\frac{2}{L_x}}\ \sin\left(\frac{\pi\ n_x\ x}{L_x}\right) \\
\phi_y(y) &= \sqrt{\frac{2}{L_y}}\ \sin\left(\frac{\pi\ n_y\ y}{L_y}\right) \\
\phi_z(z) &= \sqrt{\frac{2}{L_z}}\ \sin\left(\frac{\pi\ n_z\ z}{L_z}\right)
\end{aligned}$$

NB! Anta at n_x, n_y, n_z er *positive* heltall.

a) Formulér Pauli-prinsippet.

b) Finn en formel for energi-nivåene E for systemet definert over, uttrykt ved blant annet n_x, L_x, etc.

c) Sett $L_x = L_y = L$, og $L_z > L$. Dersom vi har flere elektroner i boksen, hvor mange elektroner kan det *høyst* befinne seg i nest laveste energi-nivå?

d) Sett $L_x = L_y = L$, og $L_z < L$. Dersom vi har flere elektroner i boksen, hvor mange elektroner kan det *høyst* befinne seg i nest laveste energi-nivå?