NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Asle Sudbø
Intern tlf: 93403
Mobil tlf: 91 63 59 79

EKSAMEN I FAG 74125 - FYSIKK
Onsdag 27. mai, 1998
kl. 0900-1500
Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator

Opplysninger som det kanskje kan bli bruk for, og som kandidaten selv må tolke:

$$
\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1} \\
h &= 2\pi\,\hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}
\end{aligned}
$$

Tidsavhengig Schrödinger-ligning for partikkel som beveger seg i en dimensjon, i et potensial $U(x)$:

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} + U(x)\;\Psi(x,t) \;=\; i\,\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}
$$

Stasjonær tilstand:

$$
\Psi(x,t) = \psi(x)\; e^{-\frac{iEt}{\hbar}}
$$

Heisenberg's usikkerhets-relasjoner

$$
\begin{aligned}
\Delta x\;\Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\
\Delta t\;\Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

Generell løsning $y(x)$ til en 2. ordens lineær differensial ligning gitt ved

$$
\frac{d^2y}{dx^2} + K^2\,y = 0
$$

hvor K er en *reell* størrelse, kan uttrykket på formen

$$
y(x) = C_1\;e^{iKx} \;+\; C_2\;e^{-iKx}
$$

hvor C_1, C_2 generelt kan være komplekse tall.
Generell løsning $y(x)$ til en 2. ordens lineær differensial ligning gitt ved

$$
\frac{d^2y}{dx^2} - K^2\,y = 0
$$

hvor K er en *reell* størrelse, kan uttrykket på formen

$$y(x) = C_1 \; e^{Kx} \; + \; C_2 \; e^{-Kx}$$

hvor C_1, C_2 generelt kan være komplekse tall.
Euler's formel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \; \sin(x)$$

For et dempet svingesystem som utfører svingninger $x(t)$ med vinkelfrekvens ω rundt en likevekt, er kvalitetsfaktoren Q definert ved

$$x(t) = A \; \exp(-t/Q) \; \cos(\omega t + \phi)$$

Identiteter for trigonometriske og eksponensial funksjoner

$$\begin{aligned}
\frac{de^{\alpha x}}{dx} &= \alpha \; e^{\alpha x} \\
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x) \; \cos(y) \pm \sin(y) \; \cos(x) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x) \; \cos(y) \mp \sin(y) \; \sin(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + ... \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + ... \\
\frac{d\cos(x)}{dx} &= -\sin(x) \\
\frac{d\sin(x)}{dx} &= \cos(x) \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3.... \cdot n
\end{aligned}$$

Oppgave 1 (Teller 40 %)

a) Et partikkel med masse m beveger seg langs én retning i et potensial $V(x)$. Sett opp Schrödinger-ligningen for den tidsuavhengige delen av bølgefunksjonen, $\psi(x)$.

b) Tre krav til $\psi(x)$ og dens deriverte er: i) $\psi(x)$ skal være normerbar, dvs. integralet $\int |\psi(x)|^2 \, dx$ skal eksistere, ii) $\psi(x)$ være kontinuerlig overalt hvor partikkelen kan bevege seg, og iii) den deriverte av $\psi(x)$ skal være kontinuerlig overalt hvor partikkelen kan bevege seg. Forklar *kort* hva den fysiske betydningen av disse kravene er.

c) Totalenergien til partikkelen er E. La potensialet være gitt ved $V(x) = U_0 < E$, når $0 < x < L$, og null ellers. Sett opp Schrødinger-ligningen fra oppgave a) i de tre områdene I) $x < 0$, II) $0 < x < L$, III) $x > L$. Det kan i resten av oppgaven tas for gitt at løsningene til Schrödinger-ligningen i de tre områdene er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\psi_I(x) &= A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} \\
\psi_{II}(x) &= C\, e^{iKx} + D\, e^{-iKx} \\
\psi_{III}(x) &= F\, e^{ikx} \\
k &= \sqrt{\frac{2m\, E}{\cancel{2\pi}\hbar^2}} \\
K &= \sqrt{\frac{2m\,(E - U_0)}{\cancel{2\pi}\hbar^2}}
\end{aligned}
$$

d) Bruk kravene fra b) til å vise at A og B kan uttrykkes ved F slik

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{F\, e^{ikL}}{4} \left[(1 + \frac{k}{K})(1 + \frac{K}{k})\, e^{-iKL} + (1 - \frac{k}{K})(1 - \frac{K}{k})\, e^{iKL} \right] \\
B &= \frac{F\, e^{ikL}}{4} \left[(1 + \frac{k}{K})(1 - \frac{K}{k})\, e^{-iKL} + (1 - \frac{k}{K})(1 + \frac{K}{k})\, e^{iKL} \right]
\end{aligned}
$$

e) Bruk dette til å finne sannsynligheten for at partikkelen reflekteres (refleksjonskoeffisienten R) ved $x = 0$, når den sendes inn fra venstre som en fri partikkel. Hint: Svaret kan skrives på formen

$$
R = \frac{(K^2 - k^2)^2\, f(KL)}{(K^2 - k^2)^2\, f(KL) + 8\, k^2\, K^2}
$$

hvor $f(KL)$ er en like funksjon av KL (og som skal bestemmes). Hvorfor er svaret uavhengig av fortegnene på K og k? Hva kan du si om $f(KL)$, uten å regne, når $L \to 0$?

f) Finn sannsynligheten for at partikkelen går helt igjennom barrieren, og sannsynligheten for at den blir fanget inne i potensial barrieren. Hva ville denne siste verdien bli, dersom du hadde regnet klassisk?

Oppgave 2 (Teller 20 %)

a) Forklar kort begrepet båndstruktur.

b) Formuler Pauli-prinsippet, og forklar hvordan båndfylning og Pauli-prinsippet bestemmer hvorvidt et system er et metall eller en isolator/halvleder.

c) Forklar hva som definerer en superleder, og hva forskjellen er på en perfekt leder og en superleder.

d) Forklar hvordan to elektroner som beveger seg i et gitter kan trekkes mot hverandre, selv om de ville støtes fra hverandre dersom de beveget seg i vakuum.

e) For å forstå det sterke magnetfeltet rundt Jupiter, tror man at dens indre kjerne består av krystallinsk hydrogen. Anta at det under høyt nok trykk kan dannes krystallinsk hydrogen. Hydrogen atomet har et proton i kjernen og ett elekton i $1s$ tilstand rundt kjernen, dvs. energikvantetallet for tilstanden er $n - 1$, og kvantetallene for dreieimpulsen rundt kjernen er $l = 0, m_l = 0$. Vil krystallinsk hydrogen være et metall eller en isolator? Begrunn svaret kort.

Oppgave 3 (Teller 40 %)

En masse M som beveger seg på et horisontalt underlag, er festet i en vegg via en fjær med fjærkonstant k. Likevektsposisjonen fra veggen er x_0, og avviket fra likevektsposisjonen kalles $x(t)$, som er en funksjon av tiden t. Massen merker en friksjonskraft når den beveger seg, med effektiv friksjonskoeffisient γ. Systemet kan også utsettes for en ytre kraft $-F_0 \cos(\omega_e t)$, hvor ω_e er en gitt vinkelfrekvens. Bevegelsesligningen $F = Ma$, hvor a er systemets aksellerasjon, tar i dette tilfellet formen

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = -F_0 \cos(\omega_e t)$$

Svingebevegelsen er, under visse betingelser, beskrevet ved den generelle formen (NB! skal ikke vises)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ x_h(t) &= A \ \exp(-\gamma t/2M) \ \cos(\omega' t + \phi) \\ x_p(t) &= \frac{F_0}{M} \frac{\cos(\omega_e t + \theta)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_e \gamma/M)^2}} \end{aligned}$$

hvor $\omega_0^2 = k/M$. I delspørsmålene a)-e) settes $F_0 = 0$.

a) Forklar betydningen av størrelsene $x_h(t)$ og $x_p(t)$.

b) Finn et generelt uttrykk for ω' ved hjelp av k, M, og γ. Bestem også største verdi på γ, uttrykt ved M og k, som gjør at formen på $x_h(t)$ gitt over, er gyldig.

c) Hva skjer når γ overstiger verdien funnet i b)?

d) Det oppgis at $\omega' = (3/\sqrt{10})\ \omega_0$, $M = 10.0$ kg, og $k = 100\ N/m$. Beregn kvalitetsfaktoren Q for dette svingesystemet.

e) Hvor mange sekunder tar det før svingningene sin amplitude er redusert til 10% av startverdien ved $t = 0$? Med hvilken *faktor* må Q økes for at denne tiden skal økes til en time?

f) La $F_0 \neq 0$. Forklar begrepet resonans, slik det oppstår i svingesystemet i denne oppgaven. Bruk formen på oppgitt løsning over til å bestemme største verdi på γ som gir resonanstopp i svingningene for store tider t, som følge av ekstern kraft. Bruk verdiene for M og k fra oppgave d). Vær nøye med benevningen på γ.