74125 Fysikk (4a9) 27/5-98

Oppgave 1

a) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

b) ii) Kontinuitet i sannsynlighet for å finne partikkel.

i) Partikkel må kunne finnes inne i et volum, dersom den eksisterer.

iii) Energien må være endelig. En diskontinuitet i ψ' gir uendelig stor kinetisk energi.

c) I: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

II: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U_0\psi = E\psi$$

III: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

d) Kontinuitet av ψ og ψ'

$x=0$: ψ: $A+B = C+D$

ψ': $ik(A-B) = iK(C-D)$

$$A+B = C+D$$

$$A-B = \frac{K}{k}(C-D)$$

$$A = \frac{1}{2}\left\{C\left(1+\frac{K}{k}\right) + D\left(1-\frac{K}{k}\right)\right\}$$

$$B = \frac{1}{2}\left\{C\left(1-\frac{K}{k}\right) + D\left(1+\frac{K}{k}\right)\right\}$$

$x=L$: Tilsvarende betraktninger gir:

ψ: $Ce^{iKL} + De^{-iKL} = Fe^{ikL}$

ψ': $iK\left(Ce^{iKL} - De^{-iKL}\right) = ikFe^{ikL}$

$$C = \frac{e^{-iKL}}{2} Fe^{ikL}\left(1+\frac{k}{K}\right)$$

$$D = \frac{e^{iKL}}{2} Fe^{ikL}\left(1-\frac{k}{K}\right)$$

Innsatt i A og B:

$$A = \frac{Fe^{ikL}}{4}\left\{\left(1+\frac{k}{K}\right)\left(1+\frac{K}{k}\right)e^{-iKL} + \left(1-\frac{k}{K}\right)\left(1-\frac{K}{k}\right)e^{iKL}\right\}$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{4}\left\{\left(1+\frac{k}{K}\right)\left(1-\frac{K}{k}\right)e^{-iKL} + \left(1+\frac{K}{k}\right)\left(1-\frac{k}{K}\right)e^{iKL}\right\}$$

Absolutt-kvadratene:

$$|B|^2 = \frac{(|F|^2/16)}{k^2K^2}\left\{2\,(K^2-k^2)^2 - 2\,(K^2-k^2)^2\cos(2KL)\right\}$$

$$A = \frac{Fe^{ikL}}{4kK}\left\{(K+k)^2 e^{-iKL} + (K-k)^2 e^{iKL}\right\}$$

$$|A|^2 = \frac{|F|^2/16}{k^2K^2}\left\{2\,(K^2-k^2)^2 - 2(K^2-k^2)^2\cos(2KL) + 2\cdot 8k^2K^2\right\}$$

$$|A|^2 = \frac{|F|^2}{16k^2K^2}\left\{\underbrace{(K+k)^4+(K-k)^4}_{2(K^2-k^2)^2+16k^2K^2} - \underbrace{(K+k)^2(K-k)^2}_{=(K^2-k^2)^2}\underbrace{\left[e^{-2iKL}+e^{2iKL}\right]}_{2\cos(2KL)}\right\}$$

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(K^2-k^2)^2\left[1-\cos(2KL)\right]}{(K^2-k^2)^2(1-\cos 2KL) + 8k^2K^2}$$

$f(KL) = 1-\cos(2KL)$

$f(KL) \to 0;\quad L \to 0$ Uendelig tynne barrierer reflekterer ikke.

Refleksjonssymmetri $\Rightarrow k^2, K^2$ etc.

1 Sannsynlighet for transmittering:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{8k^2K^2}{(K^2-k^2)^2(1-\cos(2KL)) + 8k^2K^2}$$

Nå ser vi at

$$\boxed{T + R = 1}$$

$\Rightarrow$ Sannsynlighet $\underline{\underline{P}}$ for å bli fanget av barriere: $\underline{\underline{0}}$

NB!! Man skal ikke bruke $R + T = 1$ apriori for å finne T, ~~R~~ når R ~~e~~ funnet

Apriori har vi

$$\underline{R + P + T = 1}$$

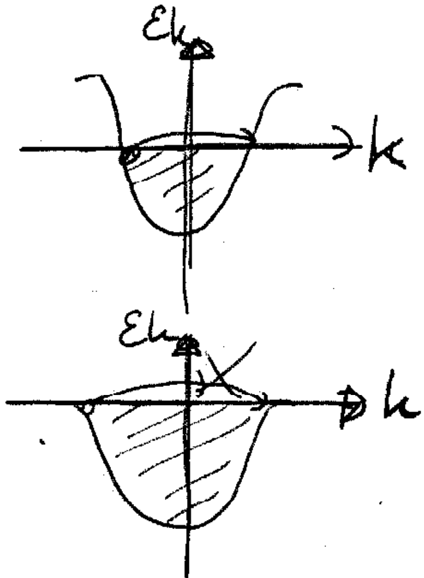
Man skal beregne T uavhengig av R, og så finne at $R + T = 1$

Dermed må $\underline{\underline{P = 0}}$.

Oppgave 2

a) Båndstruktur: Tillatte og forbudte energi-bånd for elektron bevegelse i krystaller.

b) Pauli: To fermioner kan ikke samtidig okkupere én og samme én-partikkel tilstand.



Metall: Fri, tilgjengelig slutt tilstand. Dermed kan tyngdepunktet i Fermi-sjøen lett flyttes $\Rightarrow$ strøm

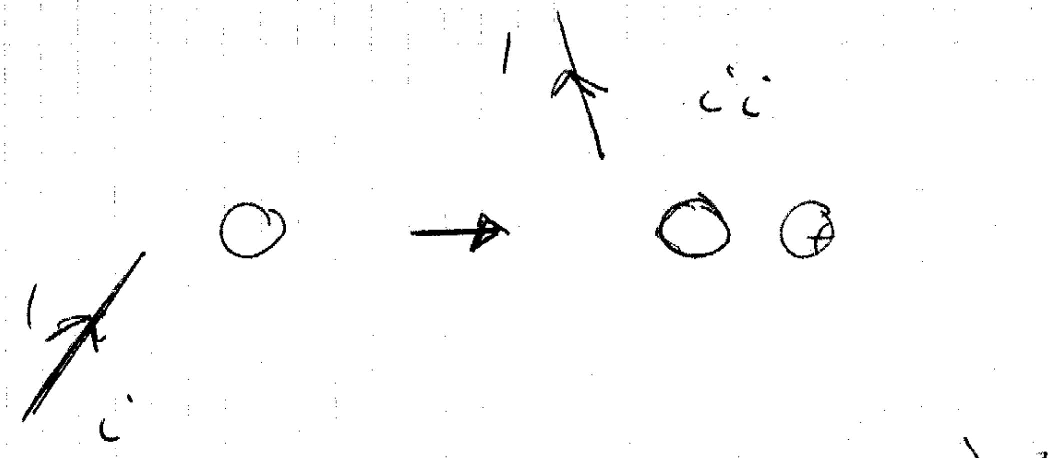
Isolator / halvleder: Ingen frie, tilgj. slutt tilstander. Dermed må man eksitere elektron/hull par over båndgapet for å få strøm.

c) Superleder: $\rho(T) = 0; \quad T < T_c$

Meissner-effekten: Påtrykt magnetfelt stenges ute av superleder.

Perfekt leder har ingen Meissner-effekt. Det har en superleder.

d)



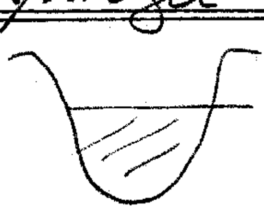
i) Elektron rekylerer med ion. Forsvinner og e langt unna før ionet relakserer tilbake

ii) Litt ekstra ⊕ - ladning vil trekke på el. 2.

iii) Elektron 2 trekkes mot ionet forbi elektron 1 hadde vært der ⇒ effektiv tiltrekning mellom ~~[illegible]~~ elektroner!

Hydrogen-krystall:

e)



$\frac{1}{2}$ - fyld bånd

Hvert bånd kan akkomodere 2N elektroner. Hydrogen-atomene avgir hvert ett el. til bånd ⇒ metall

Oppg 3

a) **xh**: Svingning systemet utfører når overlatt til seg selv ($F_0 = 0$). Dør ut etter en viss tid (eksponensielt)

xp: Svingningene som er et resultat av F_0 alene og som vil eksistere selv om xh har dødd ut.

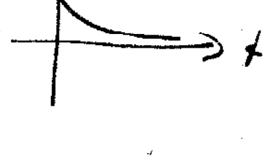
b)

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2}$$

$$\frac{k}{M} = \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2$$

$$\frac{\gamma}{2M} = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow \gamma_{max} = 2\sqrt{kM}$$

c) $\gamma > \gamma_{max}$: Svingningene blir overkritisk dempet



d) $Q = \frac{2M}{\gamma}$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,\omega_0$$

$$\frac{k}{M} - \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2 = \frac{9}{10}\,\frac{k}{M}$$

$$\frac{1}{10}\,\frac{k}{M} = \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2$$

$$\left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2 = \frac{1}{10}\,\frac{100}{10} = 1$$

$$\underline{\underline{a = 1}}$$

e)

$$e^{-T} = \frac{1}{10}$$

$$-T = -\ln 10$$

$$T = \ln 10 \approx 5$$

$$\underline{\underline{= 2.3 \text{ sek}}}$$

$$e^{-\tilde{T}\frac{1}{\tilde{a}}} = \frac{1}{10}$$

$$\tilde{T} = 3600$$

$$\frac{\tilde{T}}{\tilde{a}} = \ln 10 = \frac{T}{a}$$

$\tilde{Q} = \frac{\tilde{T}}{T} \quad Q$

Kvalitetsfaktoren Q må økes med faktoren $\frac{\tilde{T}}{T} = 1563$

f) <u>Resonans:</u> Ekstern frekvens i nærheten av systemets egne naturlige svingefrekvens, slik at <u>responsen</u> til ekstern kraft blir <u>maximal.</u>

$$A(\omega_e^2) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_e \gamma}{M}\right)^2}}$$

Max. i $A(\omega_e^2)$ er gitt av minimum i $(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_e \gamma}{M}\right)^2$ m.h.p. ω_e^2. Min. er gitt ved

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{M}\right)^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2$$

Størst verdi på γ

som gir min. i mono:

for noen reell ω_e:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{M}\right)^2 = \frac{k}{M}$$

$$\gamma = \sqrt{2}\,\sqrt{kM}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{1000}$$

$$= 44.7 \; \frac{Ns}{m}$$

Mindre enn det som skal til for å få overkritisk dempning

At dimensjonen på γ er $\frac{Ns}{m}$ kan sees direkte fra bev. ligning, eller så finner vi det slik:

$$[k] = \frac{N}{m} \quad ; \quad [M] = kg$$

$$N = \frac{kg\,m}{s^2} \Rightarrow kg = \frac{Ns^2}{m}$$

$$[\sqrt{kM}] = \sqrt{\frac{N}{m}\,\frac{Ns^2}{m}} = \frac{Ns}{m}$$

Bev. ligning: $N = [\gamma]\cdot\frac{m}{s} \Rightarrow [\gamma] = \frac{Ns}{m}$

$$\left(\sqrt{\frac{N}{m}\,\frac{Ns^2}{m}} = \frac{Ns}{m}\right)$$