

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE  
UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 36 52

**Eksamen i fag 74125 FYSIKK**

Torsdag 20. mai 1999

Tid: 09:00—15:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: Matematisk formelsamling.

O.H. Jahren og K.J. Knudsen: Formelsamling i matematikk.

Dette eksamenssettet er på 2 sider pluss et generelt vedlegg på 4 sider.

**Oppgave 1:**

En masse  $M$  som beveger seg vertikalt er opphengt i en fjær med fjærkonstant  $K$ . Likevektsavstanden fra taket er  $x_0$ , og avviket fra likevektsavstanden kalles  $x(t)$ ; denne er en funksjon av tiden  $t$ . Det virker en friksjonskraft på systemet når massen beveger seg, med effektiv friksjonskoeffisient  $\gamma$ . Systemet kan også utsettes for en ytre kraft,  $F_e \cos(\omega_e t)$ , hvor  $\omega_e$  er en gitt vinkelfrekvens. Newton's bevegelsesligning,  $F = Ma$  (der  $a$  er massens akselerasjon), tar i dette tilfellet formet

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + Kx = F_e \cos(\omega_e t). \quad (1)$$

Svingebevegelsen er, under visse betingelser, beskrevet ved den generelle formen (**NB!** Skal ikke vises)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t), \\ x_h(t) &= \Lambda \exp(-\gamma t/2M) \cos(\omega' t + \varphi), \\ x_p(t) &= \frac{F_e}{M} \frac{\cos(\omega_e t + \vartheta)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_e \gamma/M)^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

hvor  $\omega_0^2 = K/M$ . I delspørsmålene **a–e** nedenfor settes  $F_e = 0$ .

- Forklar betydningen av størrelsene  $x_h(t)$  og  $x_p(t)$ .
- Finn den generelle sammenhengen mellom  $\omega'$  og størrelsene  $K$ ,  $M$ , og  $\gamma$ .
- Bestem den største verdien som  $\gamma$  kan ha (uttrykt ved  $K$  og  $M$ ) slik at formen (2) for  $x_h(t)$  er gyldig. Hva skjer når  $\gamma$  overstiger denne verdien?

- d) Det oppgis at  $\omega' = 6 \text{ s}^{-1}$ ,  $M = 5.0 \text{ kg}$ , og  $K = 200 \text{ N/m}$ . Beregn kvalitetsfaktoren  $Q$  for dette svingesystemet.
- e) Hvor mange sekunder tar det før svingeamplituden er redusert til 10% av startverdien ved  $t = 0$ ? Med hvilken *faktor* må  $Q$  økes for at denne tiden skal økes til en time?
- f) Anta nå at  $F_e \neq 0$ . Forklar begrepet resonans, slik det oppstår i svingesystemet i denne oppgaven. Bruk formen på den oppgitte løsningen til å bestemme den største verdien på  $\gamma$  som gir en resonanstopp i svingingene for store tider  $t$ , som følge av ekstern kraft. Bruk verdiene for  $M$  og  $K$  fra delspørsmål d.

### Oppgave 2:

Se på en partikkel med masse  $m$  i et éndimensjonalt system med et energipotensial gitt ved

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ U_0 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

- a) Hva er sammenhengen mellom partikkelens energi  $E$ , masse  $m$ , og de Broglie bølgelengde  $\lambda$  når i)  $x \ll 0$ , og ii)  $x \gg 0$ ?
- b) Sett opp løsningene for Schrödingerligningen for  $x \leq 0$  og  $x > 0$ . Forklar hvordan de skal skjøtes sammen ved  $x = 0$ , og hvorfor.
- c) Anta først at partikkelen har en total energi  $E > U_0$ . For hvilken verdi av  $E/U_0$  er  $R = T$ ? Her er  $R$  refleksjonskoeffisienten til en materiebølge som kommer inn fra venstre, og  $T$  er transmisjonskoeffisienten for den samme.
- d) Anta deretter at  $E < U_0$ . Hva blir refleksjons- og transmisjons-koeffisienten i dette tilfellet?
- e) Anta videre at partikkelen er et elektron, i situasjonen fra foregående punkt. Dersom  $U_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ , og  $E = \frac{9}{10}U_0$ , hva blir typisk inntrengningsdybde for partikkelen i potensialbarrieren ved  $x = 0$ ?

**Oppgitt:**  $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , elektronmassen  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Planck's konstant  $h = 2\pi\hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

### Oppgave 3:

Du står i ro ved jernbanelinjen i Muruvik med en 400 Hz sirene (med god retningsbestemmelse). Når Nordlandsbanen nærmer seg dirigerer du sirenen mot lokomotivet.

- a) Vil togføreren høre en høyere, like høy, eller lavere frekvens enn 400 Hz?
- b) Lokomotivet kaster ekko av sirenen tilbake til deg. Vil dette ekkoet, slik du hører det, ha høyere, like høy, eller lavere frekvens enn den togføreren hører?
- c) Lydhastigheten er 330 m/s den dagen, og toget kjører i 100 km/time. Nøyaktig hvilken frekvens har ekkoet (i) når toget kommer i møte med deg, og (ii) når det har kjørt forbi og du retter sirenen mot bakerste vogn i toget?

**Oppgitt:** Doppler effekt (for lyd):  $f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$  ( $S$  sender,  $L$  lytter).

## Vedlegg 1:

## Elektrisitet

Coulomb-kraft:  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$ . (for punktladninger  $q_i$ )

Elektrisk felt:  $\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$  (fra punktladning  $q_1$ )

Gauss' lov ( $S$  lukket):  $\Phi_E = \iint_S d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = Q/\epsilon_0$ . ( $Q$  ladning innenfor  $S$ )

Elektrisk potensial:  $V_a - V_b = \int_a^b d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$   $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

Coulomb potensial:  $V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (punktladning  $q$  i origo)

Flate- og volum-ladning:  $V(\mathbf{r}) = \iint \frac{d^2 r_1 \sigma(\mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$   $V(\mathbf{r}) = \iiint \frac{d^3 r_1 \rho(\mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$

Elektrisk feltenergi pr. volum:  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2$

I dielektrisk medium:  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon$ , ( $\epsilon_r$  relativ permitivitet)

## Magnetisme

Magnetisk kraft på ladning  $q$  med hastighet  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Kraft på strømførende leder i magnetfelt:  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$

Biot-Savart's lov:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$

Magnetfelt fra lang rett leder:  $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$

Ampère's lov:  $\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 I$  ( $I$  strøm gjennom  $C$ )

Magnetiske ladninger finnes ikke ( $S$  lukket):  $\Phi_B = \iint_S d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Faraday's induksjonslov:  $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \iint_S d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ( $\mathcal{E}$  induisert ems)

Magnetisk feltenergi pr. volum:  $u_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$

I materielt medium:  $\mu_0 \rightarrow \mu_r \mu_0 = \mu$ . ( $\mu_r$  relativ permeabilitet)

## Elektriske kretser

Resistans ( $\rho$  resistivitet,  $\ell$  lengde,  $A$  tverrsnitt):  $R = \rho\ell/A$

I serie og parallell:  $R_s = R_1 + R_2$ ,  $R_p^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$ .

Kapasitans:  $C = Q/V$   $Q$  ladning,  $V$  spenning

Platekondensator ( $A$  plate-areal,  $d$  plate-avstand):  $C = \epsilon A/d$

I serie og parallell:  $C_s = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ ,  $C_p = C_1 + C_2$ .

**Elektriske kretser (og svingekretser) forts.**

|   |   |   |
|---|---|---|
| Selvinduktans ( $N\Phi_B$ fluks gjennom spole med $N$ viklinger): | $L = N\Phi_B/I$   |   |
| Lang spole (tverrsnitt $A$ , lengde $\ell$ , $N$ viklinger):      | $L = \mu AN^2/\ell$   |   |
| I serie (s) og parallell (p):                                     | $L_s = L_1 + L_2,$  | $L_p^{-1} = L_1^{-1} + L_2^{-1}.$                   |
| Energi i kondensator:   | $U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}$      |   |
| Magnetisk energi i spole:   | $U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}N\Phi_B I$                |   |
| Veksel-strøm og spenning:   | $i(t) = I \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi f,$              | $v(t) = V \cos(\omega t + \varphi).$                |
| Effekt (tidsmidlet):  | $P_{av} = \frac{1}{2}VI \cos \varphi$                         |   |
| Kompleks impedans:  | $Z =  Z  e^{j\varphi} = (V/I) e^{j\varphi}$                   |   |
| For $RCL$ -seriekrets:  | $ Z  = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2},$             | $\tan \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$ |
| med kompleks impedans:  | $Z =  Z  e^{j\varphi} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$ |   |
| I serie (s) og parallell (p):                                     | $Z_s = Z_1 + Z_2,$  | $Z_p^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}.$                   |
| Kvalitetsfaktor $Q$ :   | $x(t) = A \exp(-t/Q) \cos(\omega t + \varphi)$                |   |

**Bølger**

|   |   |   |
|---|---|---|
| Bølgeligning:   | $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$     | (lineær dispersjonsrelasjon)                                  |
| Relasjoner:   | $\lambda f = v, \quad \omega = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$                   | $\omega = vk$   |
| Planbølge:  | $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$  |   |
| Elektromagnetisk bølge i vakuum:  |   | $v = c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}.$                          |
| Doppler effekt (for lyd):   | $f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$   | ( $S$ sender, $L$ lytter)                                     |
| Interferens fra $N$ spalter med avstand $d$ ( $\varphi = \frac{1}{2}kd \sin \vartheta$ ): |   | $I(\vartheta) = I(0) \frac{\sin^2(N\varphi)}{\sin^2 \varphi}$ |
| Diffraksjon fra én spalt med bredde $a$ ( $\Psi = \frac{1}{2}ka \sin \vartheta$ ):        |   | $I(\vartheta) = I(0) \frac{\sin^2 \Psi}{\Psi^2}$              |
| Begge av overstående:   | $I(\vartheta) = I(0) \frac{\sin^2 \Psi}{\Psi^2} \frac{\sin^2(N\varphi)}{\sin^2 \varphi}.$ |   |

### Moderne fysikk

Fotoners energi  $E$  og bevegelsesmengde  $p$  ( $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ ):  $E = hf = \hbar\omega, p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k.$

Fotoelektrisk effekt:  $E_K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = hf - \phi$  ( $\phi$  frigjøringsarbeid)

Fotoner fra atomære overganger ( $i \rightarrow f$ ):  $hf = E_i - E_f.$

Partiklers de Broglie bølglengde:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon:  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar.$

Hydrogenspekteret:  $E_n = -\frac{hcR}{n^2} = -\frac{13.60 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Stefan-Boltzmann lov:  $I = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} T^4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

Planck's strålingslov:  $I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}$

Schrödinger's ligning:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$

Stasjonær tilstand:  $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$

### Noen fysiske konstanter

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} & \frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} & c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} & \hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} & k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} & e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} & \end{array}$$

### Dekadiske prefikser

|   |       |            |       |       |            |
|---|-------|------------|-------|-------|------------|
| E | exa   | $10^{18}$  | P     | peta  | $10^{15}$  |
| T | tera  | $10^{12}$  | G     | giga  | $10^9$     |
| M | mega  | $10^6$     | k     | kilo  | $10^3$     |
| h | hekto | $10^2$     | da    | deka  | $10^1$     |
| d | desi  | $10^{-1}$  | c     | centi | $10^{-2}$  |
| m | milli | $10^{-3}$  | $\mu$ | mikro | $10^{-6}$  |
| n | nano  | $10^{-9}$  | p     | piko  | $10^{-12}$ |
| f | femto | $10^{-15}$ | a     | atto  | $10^{-18}$ |

| Størrelse                    |                                | SI-enhet            |                                    |
|------------------------------|--------------------------------|---------------------|------------------------------------|
| Navn                         | Symbol                         | Navn                | Symbol                             |
| Elektrisk feltstyrke         | $E$                            | Volt/meter          | V/m                                |
| Elektrisk potensial          | $V$                            | Volt                | V                                  |
| Permittivitet                | $\epsilon$                     | Farad/meter         | F/m                                |
| Relativ permittivitet        | $\epsilon_r, K$                |                     | 1                                  |
| Elektromotorisk spenning     | $\mathcal{E}, U$               | Volt                | V                                  |
| Vinkelfrekvens               | $\omega$                       | invers-sekund       | s <sup>-1</sup>                    |
| Vinkel                       | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ | radian              | rad                                |
| Romvinkel                    | $\Omega$                       | steradian           | sr                                 |
| Lengde                       | $l$                            | meter               | m                                  |
| Areal                        | $A$                            | kvadratmeter        | m <sup>2</sup>                     |
| Volum                        | $V$                            | kubikmeter          | m <sup>3</sup>                     |
| Tid                          | $t$                            | sekund              | s                                  |
| Hastighet                    | $v$                            | meter pr. sekund    | m/s                                |
| Frekvens                     | $f, \nu$                       | Hertz               | Hz=s <sup>-1</sup>                 |
| Bølgelengde                  | $\lambda$                      | meter               | m                                  |
| Masse                        | $m$                            | kilogram            | kg                                 |
| Kraft                        | $F$                            | Newton              | N=kgm/s <sup>2</sup>               |
| Trykk                        | $p$                            | Pascal              | Pa=N/m <sup>2</sup>                |
| Arbeid                       | $A, W$                         | Joule               | J=kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> |
| Energi                       | $E, W$                         | Joule               | J=Ws                               |
| Effekt                       | $P$                            | Watt                | W=J/s                              |
| Termodynamisk temperatur     | $T, \Theta$                    | Kelvin              | K                                  |
| Celsiustemperatur            | $t, \Theta$                    | grad Celcius        | °C                                 |
| Varme, varmemengde           | $Q$                            | Joule               | J=VAs                              |
| Elektrisk strøm              | $I$                            | Ampère              | A                                  |
| Elektrisk ladning            | $Q$                            | Coulomb             | C=As                               |
| Potensialdifferens, spenning | $U$                            | Volt                | V                                  |
| Kapasitans                   | $C$                            | Farad               | F=As/V                             |
| Magnetisk feltstyrke         | $H$                            | Ampère pr. meter    | A/m                                |
| Magnetisk fluks              | $\Phi_B$                       | Weber               | Wb                                 |
| Magnetfelt                   | $B$                            | Tesla               | T                                  |
| Intensitet                   | $I$                            | Watt pr. kvad.meter | W/m <sup>2</sup>                   |
| Induktans                    | $L$                            | Henry               | H                                  |
| Resistans                    | $R$                            | Ohm                 | $\Omega$                           |
| Konduktans                   | $G$                            | Siemens             | S= $\Omega^{-1}$                   |
| Impedans                     | $Z$                            | Ohm                 | $\Omega$                           |
| Reaktans                     | $X$                            | Ohm                 | $\Omega$                           |