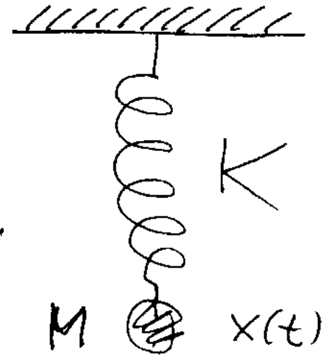
FAG 74125 FYSIKK
Eksamen 20. mai 1999

Løsningsforslag

Oppgave 1



a) $x_h(t)$ er bidraget til svingningene som skyldes utgangsposisjonen til systemet. Det er tilstede selv om ikke massen påvirkes av noen ytre kraft. Det avtar med tiden og vil tilslutt dø ut.

$x_p(t)$ er bidraget til svingningene som skyldes den ytre påtrykte kraften. Det er dette som blir igjen etter at $x_h(t)$ har dødd ut (forutsatt at det er en ytre kraft tilstede).

b) Vi setter

$$x_h(t) = A\, e^{-\gamma t/2M} \cos(\omega' t + \varphi)$$

inn i bevegelsesligningen:

$$M\ddot{x}_h + \gamma \dot{x}_h + K x_h = 0$$

$$\dot{x}_h = A e^{-\gamma t/2M}\left\{-\frac{\gamma}{2M}\cos(\omega' t+\varphi) - \omega'\sin(\omega' t+\varphi)\right\}$$

$$\ddot{x}_h = A e^{-\gamma t/2M}\left\{\left[\left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2 - \omega'^2\right]\cos(\omega' t+\varphi) + \frac{\gamma\omega'}{M}\sin(\omega' t+\varphi)\right\}$$

For at koeffisientene framfor $\cos(\omega' t+\varphi)$ skal kansellere må

$$M\left[\left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2 - \omega'^2\right] - \frac{\gamma^2}{2M} + K = 0$$

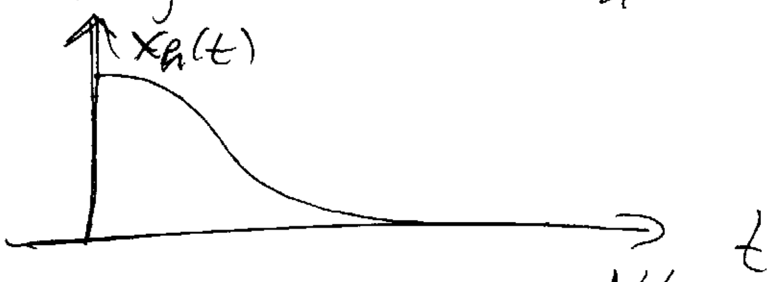
dvs at

$$\underline{\underline{\omega' = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2}}}$$

c) Maksimal demping (for ~~underkritisk~~ overkritisk system)

$$\underline{\underline{\gamma_{max} = \sqrt{4KM}}}$$

Når $\gamma \geq \gamma_{max}$ har vi ingen oscillasjoner i $x_h(t)$



d) $\omega' = 6\,s^{-1}$, $K = 200$ N/m, $M = 5$ kg

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma}{2M}\right)^2 = \frac{K}{M} - \omega'^2 = (40-36)\,s^{-2} = (2\,s^{-1})^2$$

$$\underline{\underline{Q = \frac{2M}{\gamma} = 0.5\,s}}$$

e) $$e^{-t/Q} = \frac{1}{10} \Rightarrow \underline{\underline{t}} = Q \log 10 = \underline{\underline{1.15\,s}}$$

For $t' = Q' * \log 10 = 1$ time $= 3600\,s$
må
$$\underline{\underline{\frac{Q'}{Q}}} = \frac{3600}{1.15} = \underline{\underline{3127}}$$

f) Vi holder konstant kraftamplitude, F_e, og varierer frekvensen ω_e. Da vil amplituden til utsvinget
$$\frac{F_e}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega_e^2-\omega_0^2)^2+(\omega_e \gamma/M)^2}}$$
(kanskje) ha et maksimum ved en spesiell frekvens, resonans-frekvensen. Dvs. når
$$(\omega_e^2-\omega_0^2)^2+(\omega_e \gamma/M)^2$$
er minst, dvs. når
$$2(\omega_e^2-\omega_0^2)+(\gamma/M)^2 = 0$$
eller når
$$\omega_e^2 = \frac{K}{M} - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{M}\right)^2$$
Vi har resonans bare sålenge
$$\gamma \le \sqrt{2KM} = \sqrt{2000}\,\frac{Ns}{m} = 44.7\,\frac{Ns}{m}$$
Dette er en faktor $1/\sqrt{2}$ mindre enn maksimal γ for underkritisk demping.

Oppgave 2

a) de Broglie bølgelengde

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$x \ll 0$: $E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad \left(= \frac{2\pi}{k}\right)$$

$x \gg 0$:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U_0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U_0)}} \quad \left(= \frac{2\pi}{q}\right)$$

b) For $x \leq 0$ er løsningen

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

For $x \geq 0$ er løsningen

$$\psi_{II}(x) = C e^{iqx} + D e^{iqx}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}$$

Skjøtningsbetingelser

$$\begin{matrix} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \end{matrix} \iff \begin{matrix} A + B = C + D \\ k(A-B) = q(C-D) \end{matrix}$$

For at $\psi(x)$ skal løse Schrödinger-ligningen (med et endelig potensial), må $\psi'(x)$ være deriverbar, dvs. at $\psi'(x)$ og $\psi(x)$ spesielt må være kontinuerlige.

c) Når vi setter $D=0$ (ingen bølger inn fra høyre) finner vi

$$A = \frac{1}{2}\left(1+\frac{q}{k}\right)C$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{k}\right)C$$

Refleksjons- og transmisjonskoeff. er gitt ved

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2, \quad T = 1-R$$

(Merk at det her ikke er riktig at $T=\left|\frac{C}{A}\right|^2$, det ville gitt $T+R>1$)

$T=R \Rightarrow R=\frac{1}{2}$, dvs.

$$R = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 = \frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-U_0/E}}{1+\sqrt{1+U_0/E}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-U_0/E} = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{E}{U_0} = \frac{9}{8} = 1.125}}$$

d) $E<U_0$. Kan ikke trenge (vilkårlig langt) inn i en uendelig barriere. Altså

$$\underline{\underline{T=0, \quad R=1}}$$

Oppgave 2 forts.

e) For $E < U_0$ blir løsningen av Schrödinger ligningen

$$\psi_{II}(x) = C e^{-x/\delta} \quad , \; x > 0$$

der

$$\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)}$$

Med $E = 0.9\,U_0 = 0.9 \times 2 \cdot 10^{-2}\,\text{eV}$ fås

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{\hbar\sqrt{5}}{\sqrt{\cancel{2}\, m_e U_0}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\ \text{m}\ \sqrt{5}}{2\pi\sqrt{\cancel{2}\ 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}}$$

$$= \underline{\underline{4.37\ \text{nm}}}$$

Oppgave 3:

a) Togføreren kommer mot lydkilden, og vil derfor møte hver bølgetopp litt oftere enn en som står i ro. Hun hører derfor en ***høyere frekvens*** en sirenens på 400 Hz.

b) Lokomotivet kaster ekko tilbake med samme frekvens som den togføreren hører, *målt på toget.*

En lytter som står stille ved jernbaneskinnen vil derfor høre ekkoet fra en lydkilde som kommer mot ham. Hver ny bølgetopp har litt kortere vei å gå enn den foregående, så de vil ankomme hyppigere enn om lydkilden hadde vært i ro. Altså hører lytteren i ro ved jernbaneskinnen en høyere frekvens enn den togføreren hører.

c) Vi kan ta utgangspunkt i den generelle formelen for Doppler effekt,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \tag{24}$$

der f_S er frekvensen til senderen, f_L er frekvensen som lytteren hører, v er lydhastigheten, v_L er hastigheten til lytteren og v_S hastigheten til senderen. De to siste må regnes med fortegn som må bestemmes separat.

Først er togføreren å oppfatte som en lytter i bevegelse, mens senderen er i ro. Togføreren hører derfor en frekvens

$$f_{\text{tog}} = \frac{v + v_{\text{tog}}}{v} \times 400\,\text{Hz}.$$

der v_{tog} skal regnes for positiv når toget kommer imot senderen.

Deretter er togføreren å oppfatte som en sender i bevegelse, mens lytteren er i ro. Lytteren i ro hører derfor en ekko-frekvens

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v}{v - v_{\text{tog}}} f_{\text{tog}},$$

der vi har satt inn eksplisitt at v_S må regnes som negativ når senderen kommer imot.

Altså finner man, når toget kommer i mot,

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v + v_{\text{tog}}}{v - v_{\text{tog}}} \times 400\text{ Hz} = \frac{330 + 100\,000/3\,600}{330 - 100\,000/3\,600} \times 400\,\text{Hz} = 474\text{ Hz}, \tag{25}$$

og når toget kjører i fra,

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v - v_{\text{tog}}}{v + v_{\text{tog}}} \times 400\,\text{Hz} = \frac{330 - 100\,000/3\,600}{330 + 100\,000/3\,600} \times 400\,\text{Hz} = 338\,\text{Hz}. \tag{26}$$

Vi har brukt at 1 km/time = $\frac{1\,000}{3\,600}$ m/s.