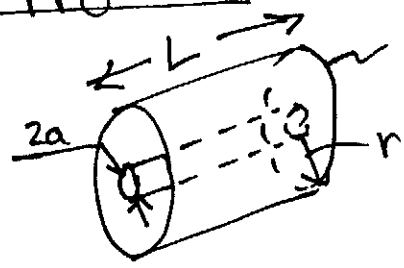
Fysikk for maskin & marin 74135 /36

Eksamen 13.1.96. Løsningsforslag

Oppgave 1

a



Gaussflate: Sylindrisk med samme senterlinje som lederen

Gauss: $\int_{\text{lukket flate}} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ← omsluttet ladning

$d\vec{S} \perp \vec{E}$ på endeflatene
$d\vec{S} \parallel \vec{E} \parallel \hat{r}$ på syl.fl.

Gauss gir her

$$2\pi r \cdot L \cdot E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda \cdot L \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$

b Generelt $\vec{E} = -\nabla V$. Her $E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$

$$V(r) = -\int^r dr' E(r') = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r - k)$$

↑ konstant

Velger nullpunkt: $V(a) = 0 \Rightarrow k = \ln a$

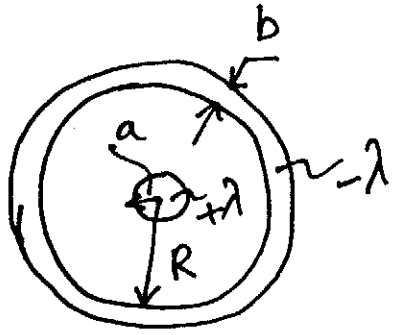
$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}$$

Her $V(r\to\infty) \to -\infty$.
Vanligvis settes $V(r\to\infty) = 0$. Ikke mulig her, men problemet skyldes idealiseringen innbygd i modellen. I praksis

① Ingen leder er ∞ lang
② Andre ledere sørger for elektromøytralitet

} ⇒ Divergensen forsvinner, $V(r\to\infty) = 0$. ✓ mulig valg

c



Potensialforskjell

$$V(a) - V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln a - \ln R\right)$$

uavhengig av valg av 0-pkt

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R}{a}$$

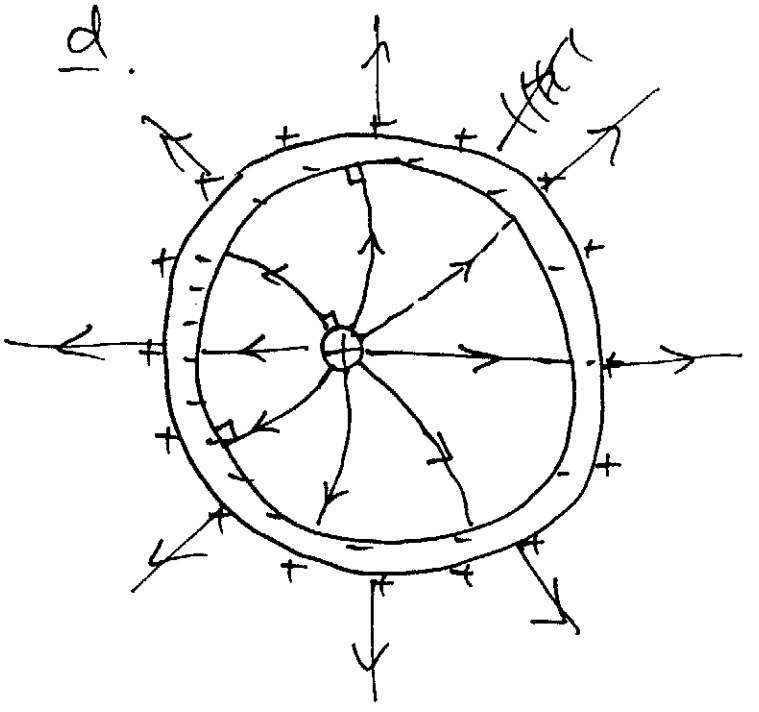
Kapasitans, pr. def:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda \cdot L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{a}} = L \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R}{a}} = L \cdot c$$

kapasitans pr. lengdeenh

$$c = \frac{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{\ln\frac{4}{1}}\ \frac{F}{m} = 4.01 \cdot 10^{-11}\ \frac{F}{m} = 40.1\ \frac{pF}{m}$$

d.



$\vec{E} \perp$ overflaten av lederne, både "sentralleder" og indre og ytre overflate av skallet

Større $|\vec{E}|$, dvs. større feltlinjetetthet der avstanden mellom "sentralleder" og skall er mindre

Ladningstettheten lik null inne i leder, bare overflateladning (indre og ytre overflate). Konstant overflatetetthet på skallets ytre overflate. Feltet på utsiden av skallet sentralsymmetrisk, selv om "sentralederen" er skjevplassert!

Oppgave 2

a Laserlys er

(i) Monokromatisk : "En" bølgelengde (dvs meget smalt bølgelengde område)

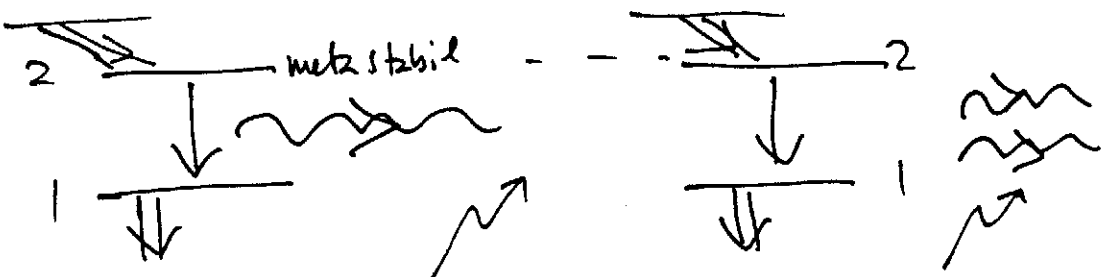
(ii) Koherent: "Stive" faserelasjoner over "store" avstander og "store" tidsdifferanser ⇔ kjennskap til lysets fase her og nå gir kjennskap til fasen langt unna, i rom og tid.

(iii) Presist retningsbestemt, "liten" romvinkel

(iv) For endel laser: høy energitetthet i strålen

⋮

Koherent laserlys av stor intensitet er bare mulig ved høy grad av stimulert emisjon i det aktive mediet. Da må dette mediet være i en ikke-likevekts tilstand med populasjons-inversjon, dvs. mange elektroner i det øvre, få i det nedre energinivået for den karakteristiske overgangen (likevekt: flest nederst):



ett foton inn, $\nu = (E_2 - E_1)/h$, to fotoner ut stimulert emisjon

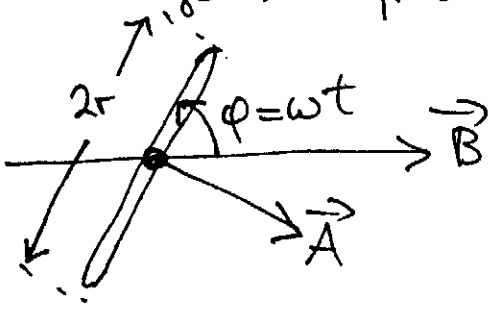
⇒ koherent kaskade

Fokuserende speil er også påkrevd etc....

Laser: Mange bruksområder

Oppgave 3

a Sett langs rotasjonsaksen



Magnetisk fluks

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = B\cdot\pi r^2\cdot\sin\varphi$$

Faraday: Indusert elektromotorisk spenning:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B\pi r^2\cos\omega t = -\mathcal{E}_0\cos\omega t$$

(Her kan gjøres forskjellige, men korrekte valg av 0-punkt for vinkler etc som gir forskjellige fortegn. Med tunga rett i munnen gir konsistente valg riktige svar!)

b Med kompleks $\mathcal{E}$ er den komplekse i gitt som

$$i = \frac{\mathcal{E}}{Z} \qquad Z = R + j\omega L$$

Kan også utledes ved diff.-lign. etc.

Slik at amplitudene er relatert ved

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

Og strømmen er fasetforsinket

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{\omega L}{R} = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad \left(\frac{\omega L}{R} = \tan\varphi\right)$$

to ekv. notasjoner

Altså: Med $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_0\cos\omega t \Rightarrow i(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}\cos(\omega t - \varphi)$

Midlere dissipasjon ~~gjelder~~

$$\overline{P} = \overline{\mathcal{E}(t)\, i(t)} = \mathcal{E}_0 i_0 \overline{\cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi)} = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_0 i_0 \cos\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 i_0 \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{1}{2} R i_0^2 = \frac{1}{2} R \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|^2}$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot \frac{\omega^2 B^2 (\pi r^2)^2}{R^2+\omega^2 L^2} = \frac{\pi^2}{2R} \cdot \frac{\omega^2 B^2 r^4}{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$

c Det siste uttrykket for $\overline{P}$ skrevet slik at innføring av $\omega_c \equiv R/L$ blir naturlig.

Dissipasjonen ~~er~~ er lik tap av kinetisk energi pr. tidsenhet

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = -\overline{P}$$

Altså

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{2\overline{P}}{I}$$

med

$$I = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\mu \cdot 2\pi r \cdot \pi a^2}^{M,\ \text{når } r \gg a} \cdot r^2 = \pi^2 \mu r^3 a^2$$

[$M = \mu \cdot$ lengde $\cdot$ tverrsni

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{\pi^2}{\underbrace{2\rho \cdot \frac{2\pi r}{\pi a^2}}_{R,\ \text{når } r \gg a}} \cdot \frac{2}{\pi^2 \mu r^3 a^2} \cdot \frac{\omega^2 B^2 r^4}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

[$R = \rho \cdot \frac{\text{lengde}}{\text{tverrsnitt}}$]

$$= -\frac{B^2}{2\mu\rho} \cdot \frac{\omega^2}{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

qed.

d. Tallverdier

$$L \approx \mu_0 r \ln\frac{r}{a} \quad (\text{når } r \gg a)$$

μ_0: abs. permeabilitet! (ikke massetetthet!!)

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 1.0 \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m}$$

oppgitt

$$\omega_c = \frac{R}{L} = \frac{\rho \cdot 2\pi r/\pi a^2}{\mu_0 r \ln\frac{r}{a}} = \frac{2\rho}{\mu_0 a^2 \ln\frac{r}{a}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 10^{-7} (10^{-2})^2 \ln 10}\ s^{-1} = 120\ s^{-1}$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 19\ Hz \qquad (\text{omdreininger pr. sekund})$$

Karakteristisk dempningstid, når $B = 3.0 \cdot 10^{-2}\ T$ (dette er en moderat B-felt styrke):

$$\tau = \frac{2\mu\rho}{B^2} = \frac{2 \cdot 8.9 \cdot 10^3 \cdot 1.7 \cdot 10^{-8}}{3.0^2 \cdot 10^{-4}}\ s = 0.34\ s$$

($\tau \sim B^2$ og kan derfor varieres over et vidt område ved å endre B!)

Ringens geometetriske dimensjoner, r & a, har <u>ingen</u> betydning for τ (så lenge $r \gg a$). τ avhenger bare av materialkonstantene μ & ρ, i tillegg til B^2.

Den karakteristiske frekvensen ω_c, derimot, avhenger <u>sterkt</u> av a ($\sim a^{-2}$) og <u>svakt</u> av r/a ($\sim (\ln r/a)^{-1}$).

e. Når $\omega \gg \omega_c$ er

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \quad \text{slik at}$$

$$\frac{d\omega^2}{dt} \approx -\frac{1}{\tau}\,\frac{\omega^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = -\frac{\omega_c^2}{\tau}$$

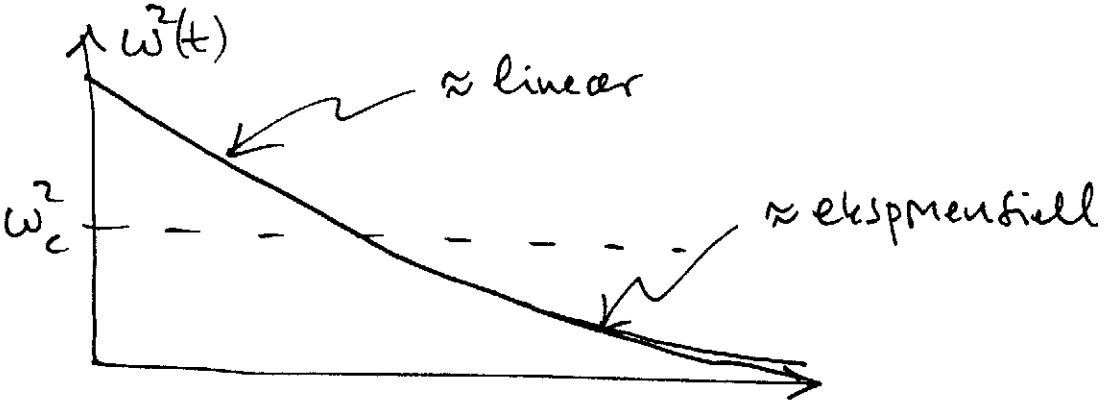
$$\Rightarrow \omega^2(t) = \omega^2(0) - \frac{\omega_c^2}{\tau}\cdot t \qquad \omega(t) \gg \omega_c$$

Når $\omega \ll \omega_c$ er

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx 1 \quad \text{slik at}$$

$$\frac{d\omega^2}{dt} \approx -\frac{1}{\tau}\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2(t) \approx \text{konst.}\, e^{-t/\tau}$$



"ω ikke for liten": Vi brukte midlet $\overline{P}$ i stedet for $P(t)$. Dette er bare OK så lenge $\tau \gg$ en periode $= \frac{2\pi}{\omega}$ eller

$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} \gg \left(\frac{2\pi}{\omega_c \tau}\right)^2 \underset{\text{her}}{\approx} \left(\frac{6.3}{120\cdot 0.34}\right)^2 \approx 0.02$$

{I parentes: Diff.ligningen for $\omega^2(t)$ kan løses uten tilnærmelse

$$\frac{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}\, d\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = -\frac{dt}{\tau}$$

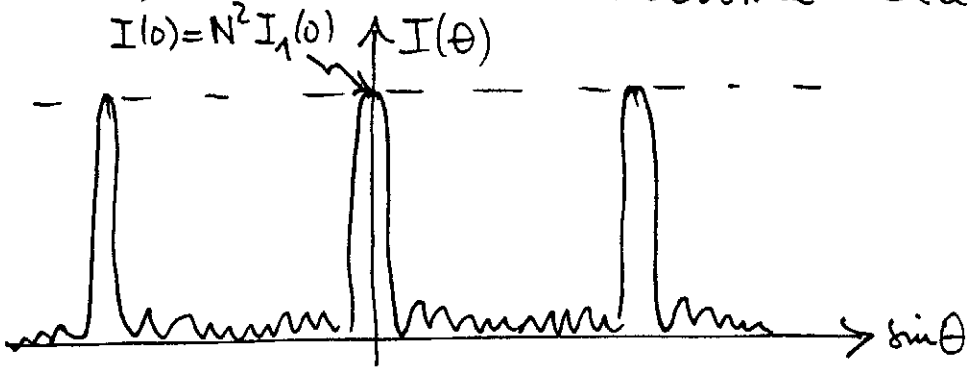
$$\Downarrow \quad \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \equiv y$$

$$\left(\frac{1}{y}+1\right) dy = -\frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln y + y = -\frac{t}{\tau} + \text{konst.}$$

Men denne (inverse) eksakte løsningen var dette ikke spurt etter! Mye viktigere å beholde den fysiske oversikten og få figuren kvalitativt riktig!! }

Oppgave 4 (Bare for maskin)

a Når vi regner $a \ll d$, dvs. neglisjerer diffraksjonseffekter, blir alle hovedmaksima like høye:



$$I(\theta) = I_1(0)\,\frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\phi\right)}{\sin^2\frac{\phi}{2}} \quad ; \quad \phi = kd\sin\theta = 2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta$$

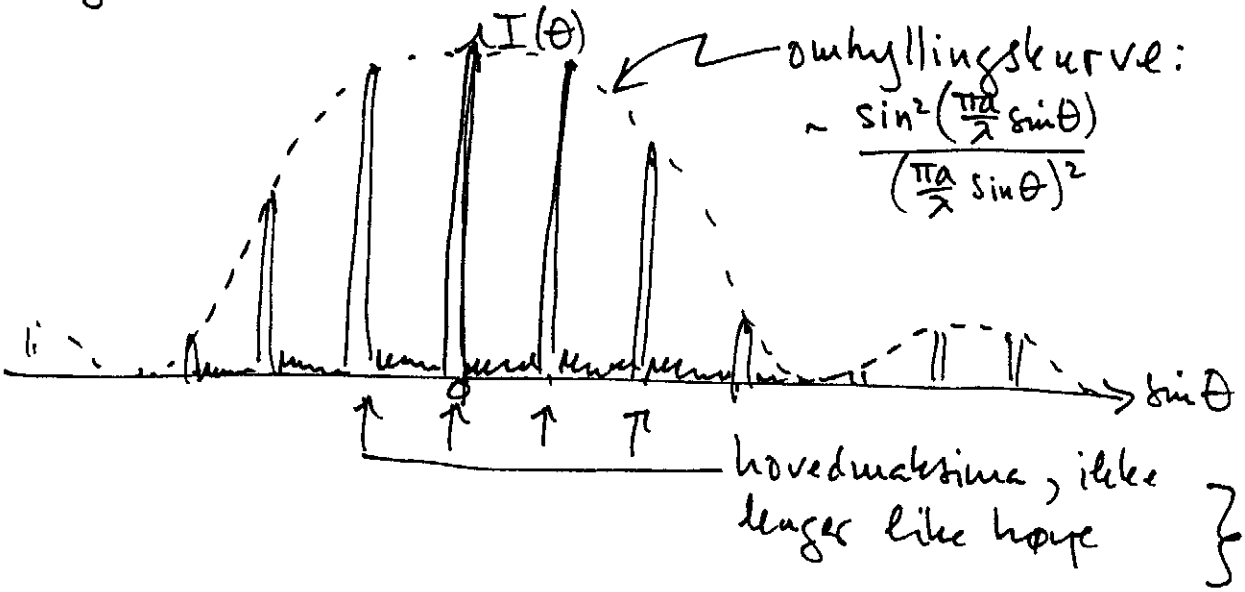
Hovedmax når $\phi \to 0$ $\quad \frac{\sin^2\frac{N}{2}\phi}{\sin^2\frac{\phi}{2}} \to \frac{\left(\frac{N}{2}\phi\right)^2}{\left(\frac{\phi}{2}\right)^2} = N^2$

Og når nevneren forøvrig er null, dvs.

$$\frac{\phi_m}{2} = m\cdot\pi \Rightarrow \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta_m = m\pi \qquad \sin\theta_m = m\cdot\frac{\lambda}{d}$$

Betingelse $|\sin\theta_m| \leq 1 \Rightarrow |m| \leq \frac{d}{\lambda}$

{I parentes (ikke spurt om dette i oppgaven!):
Dersom diffraksjonseffekter ikke ~~da~~ neglisjeres, men det tas hensyn til at spaltebredden a er endelig, fås kvalitativt



}

b Tall: $d = 1.5\,\mu m$, $\lambda = 0.6\,\mu m \Rightarrow |m| \leq \frac{1.5}{0.6} = 2.5$

Altså: mulige tallverdier er $m = 0, \pm 1, \pm 2$

5 hovedmaksima!

$\theta_0 = 0$

$\theta_1 = \sin^{-1} 0.4 = 23.6^\circ = -\theta_{-1}$

$\theta_2 = \sin^{-1} 0.8 = 53.1^\circ = -\theta_{-2}$

c Betingelse for m'te hovedmaksimum ved bølgelengden $\lambda + \Delta\lambda$: (m'te nullpunkt i $I(\theta)$'s nevner)

$$\frac{\phi_m(\lambda+\Delta\lambda)}{2} = m\pi \Rightarrow \theta_m(\lambda+\Delta\lambda) = m\frac{\lambda+\Delta\lambda}{d}$$

Betingelse for første nullpunkt <u>etter</u> m'te hovedmaksimum ved bølgelengden λ (første nullpunkt i <u>telleren</u> etter m'te nullpunkt i nevneren):

$$\frac{N}{2}\phi_{m0}(\lambda) = (Nm+1)\pi \Rightarrow \phi_{m0}(\lambda) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \sin\theta_{m0}(\lambda) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Skal $\theta_{m0}(\lambda) = \theta_m(\lambda+\Delta\lambda)$ må

$$\left(m+\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d} = m\frac{\lambda+\Delta\lambda}{d} \Rightarrow \boxed{N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}}$$

<u>d</u> Et rimelig kriterium for å (kunne) skille to bølgelengder er nettopp at m'te hovedmax for den ene faller sammen med første nabo-nullpkt. for den andre. Altså

$$N \sim \frac{\lambda}{m\Delta\lambda}$$

I vårt tilfelle er $m=1$ eller 2. Størst nøyaktighet ved $m=2$. Der stilles da det minst krevende krav til antall spalter i gitteret

$$N \gtrsim \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = \frac{6000}{2\cdot 1} = 3000$$

[Oppgaven ber om et <u>overslag</u>: Alt mellom 1000 og 10 000 spalter er OK!]