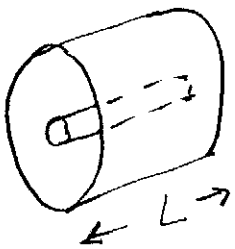
Fysikk 74135/6 for maskin/marin

Kont. eksamen 21.8.96

Løsningsforslag

Oppgave 1

a



Gaussflate symmetrisk om indre sylinder, lengde L. På endeflatene er $\vec{E} \perp \vec{A}$. Altså

$$\lambda \cdot L = \frac{Q}{K\varepsilon_0} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = L \cdot 2\pi r E(r)$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi K\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad ; \quad V(r) = -\int^{r} dr' E(r') = -\frac{\lambda}{2\pi K\varepsilon_0} \ln r$$

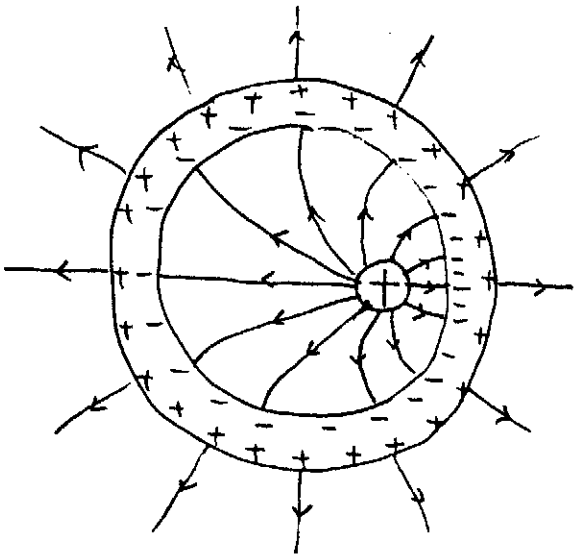
Potensialforskjell mellom indre og ytre sylinder

$$V = \frac{\lambda}{2\pi K\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Kapasitans: $C = \frac{Q}{V}$, Pr lengdeenhet: $\boxed{c = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi K\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}}$

god.

b



$\vec{E} \perp$ metalloverflater

Indusert ladning på innsiden negativ, og konsentrert der avstanden til indre leder er minst. Konstant ladningstetthet på utsiden (positiv). Symmetrisk $\vec{E}$-felt på utsiden

Oppgave 2

a Spenningsbalanse

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V_{inn}(t) = V_{inn}\cos\omega t$$

$$q = \int^t dt'\, i(t')$$

$$= |V_{inn}|\, \mathrm{Re}\, e^{j\omega t}$$

Med $i = i_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$:

$$\left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) i_0 \cancel{e^{j(\omega t-\varphi)}} = |V_{inn}|\, \cancel{e^{j\omega t}}$$

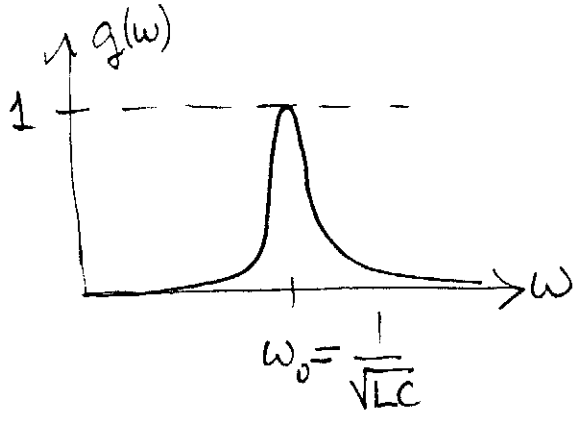
$$i_0 e^{-j\varphi} = \frac{|V_{inn}|}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

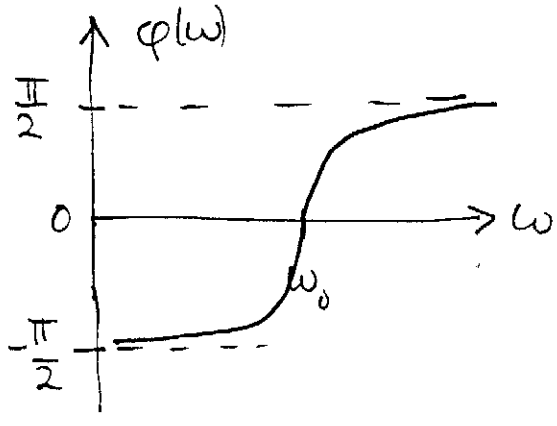
$$|V_{ut}| = R i_0$$

Altså

$$\boxed{\frac{|V_{ut}|}{|V_{inn}|} = \frac{R}{\left|R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \equiv g(\omega)}$$

b $\varphi = \mathrm{Arctg}\, \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$; Faseforsinkelsen av V_{ut} relativt V_{inn}.





c Resonansfrekvens när $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-10}}}\,\text{Hz} = \frac{10^7}{4\pi}\,\text{Hz} = 796\ \text{kHz}$$

Av definisionslikningen:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\left(1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2}}$$

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-4}}{10^{-10}}} = 200$$

$$g(\omega_0) = 1$$

$$g(1.005\,\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(1.005\cdot 200)^2\left[1-\frac{1}{1.005^2}\right]^2}} = 0.448$$

$$g(1.01\,\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(202)^2\left[1-\frac{1}{1.01^2}\right]^2}} = 0.244$$

d

$$\frac{\omega}{\omega_0} \equiv 1 + x \qquad x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,(1+x)\right]^2\left[1-\frac{1}{(1+x)^2}\right]^2}}$$

$$1-\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-\frac{1}{1+2x} \approx 1-(1-2x) \approx 2x$$

til ledende orden i x

Til ledende orden

$$g(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,(1+\cancel{x})\right]^2\cdot(2x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+K\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

I: $K = \frac{4}{R^2}\frac{L}{C}$

Merk: Siden K typisk er <u>stor</u> (i vårt eksempel er $K=(400)^2 = 1.6\cdot 10^5$) har det ingen mening å rekkeutvikle kvadratroten!

Sjekk på forenklet formel ($g(\omega_0) = 1$):

$$g(1.005\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1+1.6\cdot 10^5\cdot(5\cdot 10^{-3})^2}} = 0.447$$

$$g(1.01\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1+1.6\cdot 10^5\cdot 10^{-4}}} = 0.242$$

God overensstemmelse med eksakte tall funnet under pkt c.

Dersom inngangskretsen skal plukke ut et <u>smalt</u> frekvensbånd, må $g(\omega)$ falle raskt av for økende $\Delta\omega/\omega_0$. Da må K være <u>stor</u>. Først og fremst: R liten! Dernest: L stor og C liten.

Oppgave 3

a Med $U_0 - E = 4\,eV$ er

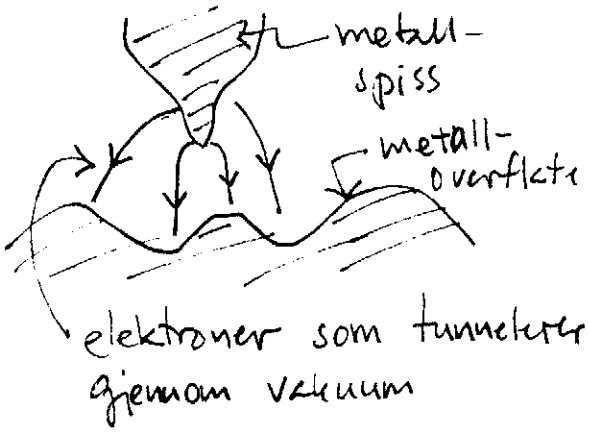
$$k = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar} = \frac{2\pi\sqrt{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\cdot 4\cdot 1.6\cdot 10^{-19}}}{6.63\cdot 10^{-34}}\,m^{-1} = 1.02\cdot 10^{10}\,m^{-1}$$

Skal $T \approx e^{-2kd}$ reduseres med faktoren e, må $2kd = 1$, altså

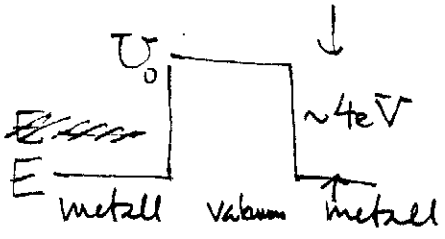
$$d = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2.04}\cdot 10^{-10}\,m = 0.49\cdot 10^{-10}\,m$$

$$\approx 0.5\,\text{Å}$$

At tunneleringssannsynligheten, og derved strømmen, er en så følsom funksjon av barrieretykkelsen utnyttes i tunneleringsmikroskopet (Binnig og Rohrer, 1981):



1 dimensjonal modell



Mens spissen sveiper over metalloverflaten reguleres avstanden slik at strømmen blir konstant.
⇒ Bilde av overflaten "atom for atom". Vertikal oppløsning ~ 0.1 Å !!

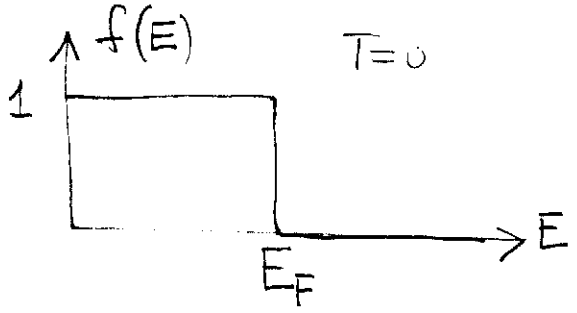
b

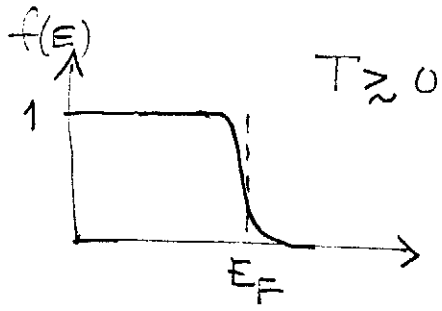
Pauliprinsippet: ~~Bare~~ Høyst ~~ett~~ elektron kan okkupere en fullstendig spesifisert (én-elektron) tilstand.

Ved $T=0$: Mangeelektronsystemet i grunntilstand, med lavest mulig energi. Én-elektron tilstandene fylt nedenfra (starter med minste energi) inntil alle elektronene har fått plass. Ved $T=0$:

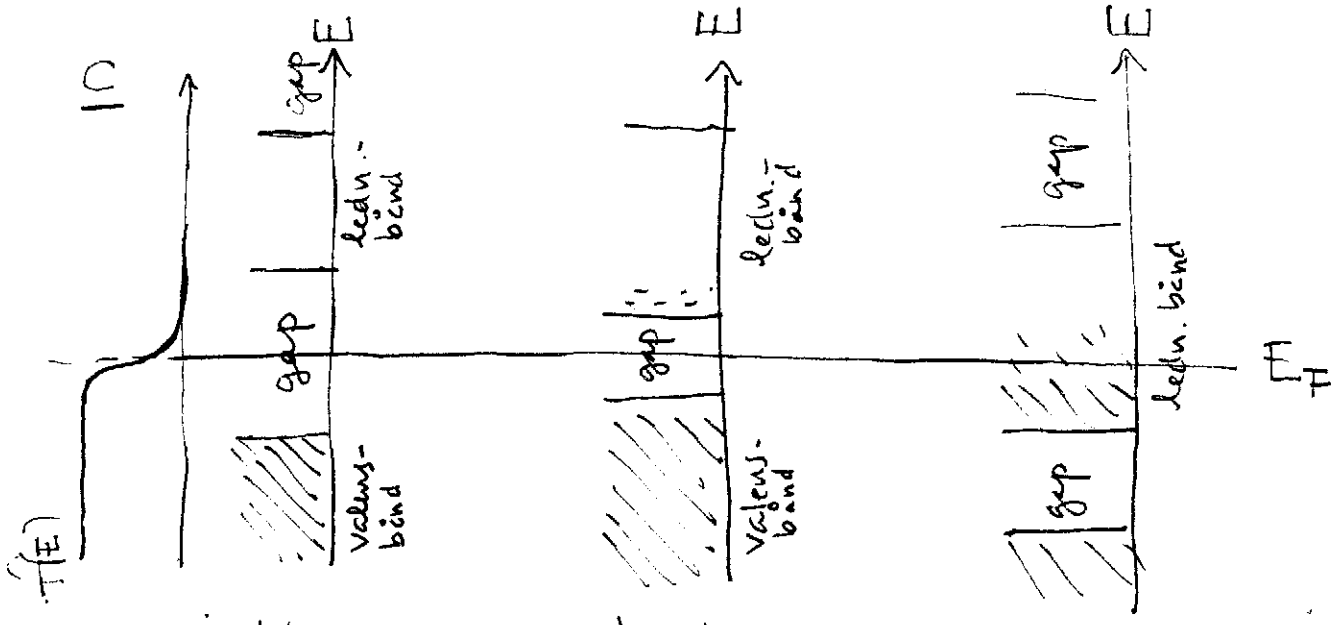
Under Fermivået: Alle el. tilst. fylte

Over —"— : Alle el. tilst. tomme





c



isolator

gap mellom val. & ledn. bånd for stort til at elektr. eksiteres

halvleder

gap mindre
Noen el. eksitert
el. i ledn.b. } sterkt T-avh.
hull i valensbånd } ledn. evne

metall

E_F i ledn. bånd
Mange elektroner deltar i ledningsprosesser.

d. I en intrinsikk halvleder kommer alle elektronene fra valens-båndet. Altså, ett elektron eksitert til ledningsbåndet etterlater et hull i val. båndet, $\boxed{n = p}$.

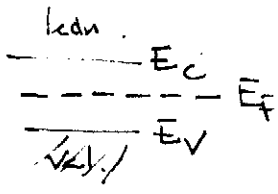
$$n = \frac{N_c}{e^{\frac{E_c - E_F}{k_B T}} + 1} \overset{E_c - E_F \gg k_B T}{\approx} N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}$$

$$\parallel$$

$$p = \frac{N_v}{e^{\frac{E_F - E_v}{k_B T}} + 1} \overset{E_F - E_v \gg k_B T}{\approx} N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}$$

$$-\frac{E_c - E_F}{k_B T} + \ln N_c = -\frac{E_F - E_v}{k_B T} + \ln N_v$$

$$\boxed{E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}}$$

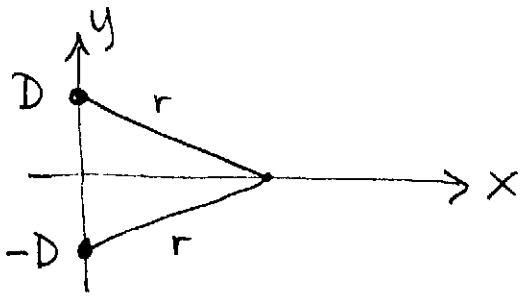


Ved $T = 0$: E_F midt i gapet

Ved $T \approx 0$ $(k_B T \ll E_c - E_v)$ E_F nær midten.

Oppgave 4

a

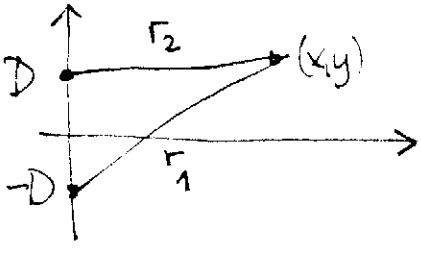


Veglengden den samme for direktelyden fra de to høyttalerne til senterlinjen.

(i) Høyttalere med samme polaritet:
Alle bølgelengder gir konstruktiv interferens

(ii) Motsatt polaritet
Alle λ gir destruktiv interferens langs senterlinjen

b



Betingelse for konstruktiv interferens i(x,y) for direktelyd med bølgelengde λ

$$r_1 - r_2 = n \cdot \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Destruktiv interferens når

$$r_1 - r_2 = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

c

For å få destruktiv interferens må

$$r_1 - r_2 \geq \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{c}{2(r_1 - r_2)}$$

Det absolutte minimum for f når $r_1 - r_2$ er maksimal (og n=0)

$$r_1 - r_2 = \sqrt{x^2 + (D+y)^2} - \sqrt{x^2 + (D-y)^2}$$

$$\max_x (r_1 - r_2) = \sqrt{(D+y)^2} - \sqrt{(D-y)^2} = |D+y| - |D-y|$$

Som en innser ved direkte geometribetraktning.

Her: $$f_{min} = \frac{344}{2 \cdot [1.5 - 0.5]} \text{ Hz} = 172 \text{ Hz}$$

d

(i) Uvesentlig dersom membrandimensjonene er mye mindre enn bølgelengden. $\lambda = 1$cm når $f = 344 / 0.01 = 34.4$ kHz. Hørbart område opp til 15-20 000 Hz. Altså: Muligens av en liten betydning for de høyeste hørbare frekvenser, ellers uten betydning

(ii) Irrelevant, begge oppfyller bølgeligningen. Den eneste forskjellen i denne sammenheng når polarisasjon i lyset gir effekter (som ikke finnes i lyd). Altså, her: Tøys!

(iii) Viktig! Romdimensjoner av noenlunde samme størrelse som typiske λ. Mange og viktige refleksjoner. Direktelyden er ikke totalt dominerende

(iv) Subtile effekter her, ikke så enkle å få full forståelse av. Ikke helt uvesentlige, i samspill med (iii)

(v) Stereo: Forskjellige signaler fra høyttalerne er jo hele viten, men — ... . Etc etc ..