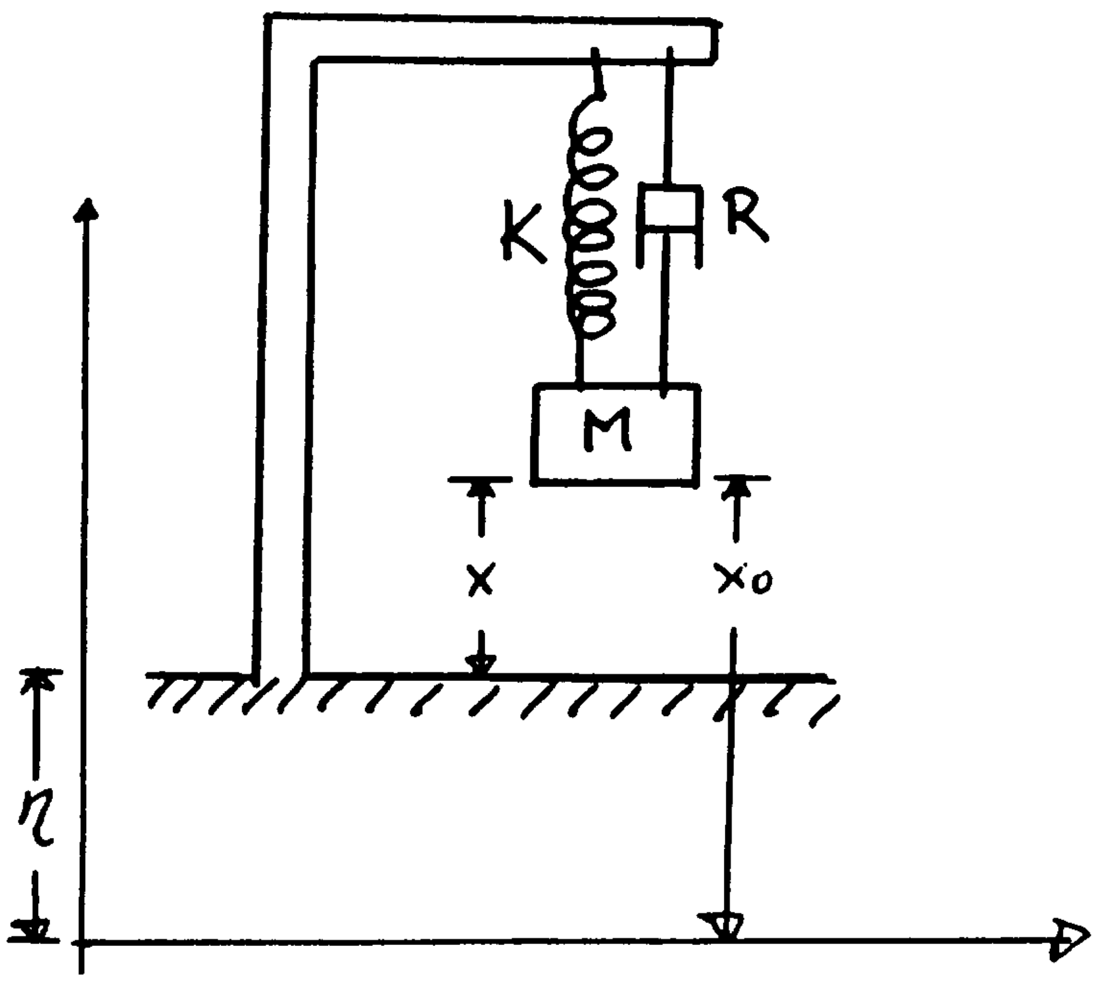
EKSAMEN FYSIKK, BYGG 74140/70540, 2. JUNI 1989

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1



a) $x_0 = \eta + x \implies \ddot{x}_0 = \ddot{\eta} + \ddot{x}$ (1)

Fjærkraft $F_K = -Kx$
Friksjonskraft $F_R = -R\dot{x}$
Bare avhengig av variasjon i x

Newtons lov i det absolutte Koordinatsystem:

$$F_K + F_R = Ma$$

$$-Kx - R\dot{x} = M\ddot{x}_0$$

Setter inn lign. (1)

$$-Kx - R\dot{x} = M(\ddot{\eta} + \ddot{x})$$

$$Kx + R\dot{x} + M\ddot{x} = -M\ddot{\eta}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{M}x = -\frac{d^2\eta}{dt^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2\eta}{dt^2}}} \quad \text{q.e.d.}$$

Hvor $\gamma = \frac{R}{2M}$ og $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

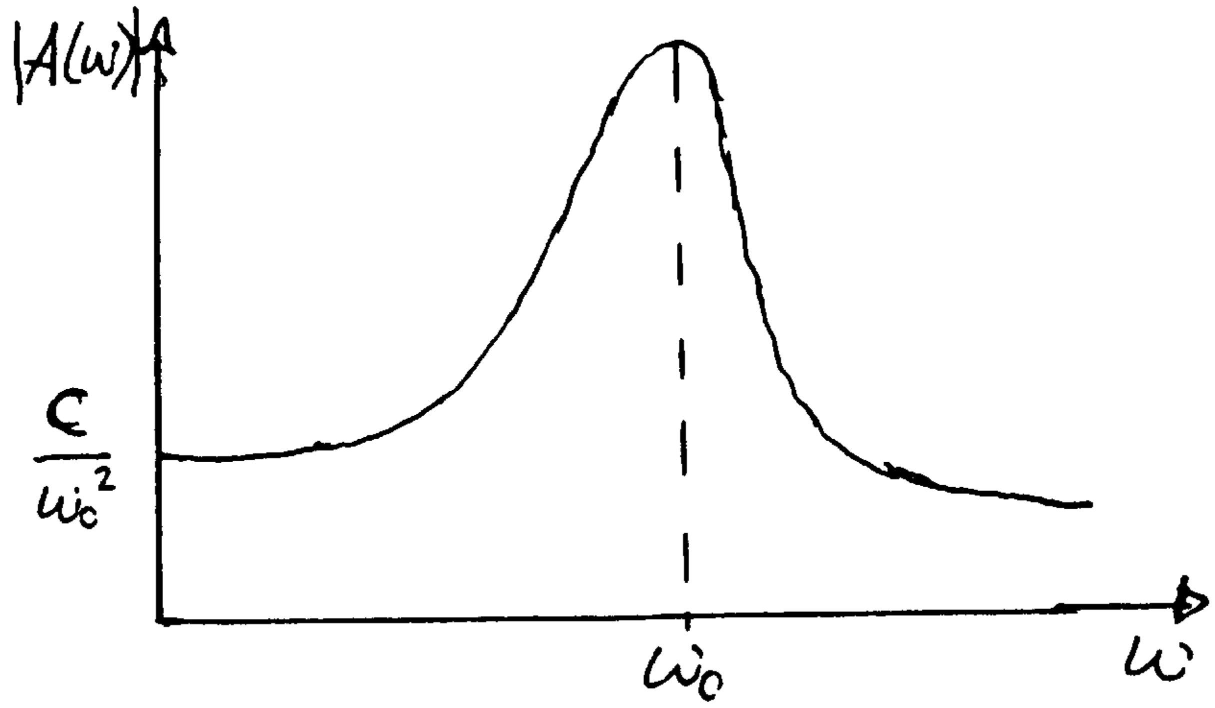
Med $\frac{d^2\eta}{dt^2} = C\cos\omega t$

blir den stasjonære løsning av denne differensialligningen:

$$\underline{\underline{x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \delta)}}$$

med (fra formelsamling):

$$\underline{\underline{|A(\omega)| = \frac{C}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}}$$



Variasjon av $|A(\omega)|$ som funksjon av ω (kvalitativt).

b) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\pi}{QT_0}$

$T = 20\ min = 20 \cdot 60\ s = 1200\ s$

$\gamma = \frac{2\pi}{2T_0}$

Innsatt i uttrykk for $|A(\omega)|$:

$$|A(\omega)| = \frac{C}{\sqrt{\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{2\pi}{2T_0}\right)^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}$$

$$= \frac{C}{(2\pi)^2\sqrt{\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}\right)^2 + \frac{1}{T_0^2T^2}}}$$

$$= \frac{C}{(2\pi)^2\sqrt{\left(\frac{1}{(1200)^2} - \frac{1}{(30)^2}\right)^2 + \frac{1}{(1200)^2(30)^2}}} = \frac{10^{-9}}{(2\pi)^2\sqrt{1.233 \cdot 10^{-6} + 7.7 \cdot 10^{-10}}}$$

$$= \frac{10^{-9}}{(2\pi)^2 \cdot 1.11 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{22,8 \cdot 10^{-9}\,m}}$$

Seismometret må kunne registrere svingeamplituder på $\underline{22,8 \cdot 10^{-9}\,m}$

c) Fra formelsamling:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{0.01 m^2}{0{,}0002 m} = 50\epsilon_0 = \underline{\underline{442{,}5 \cdot 10^{-12} F}}$$

Fra formelsamling:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3} \cdot 442{,}5 \cdot 10^{-12}}} = \underline{\underline{2{,}4 \cdot 10^5 Hz}}$$

d)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon_0 L \frac{A}{d}}} = \frac{d^{1/2}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0 L A}}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta d} = \frac{df}{dd} = \frac{d^{-1/2}}{4\pi\sqrt{\epsilon_0 L A}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\frac{1}{2}\Delta d}{d}$$

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{2\Delta f}{f} \cdot d = \frac{2 \cdot 1}{2{,}4 \cdot 10^5} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{1.67 \cdot 10^{-9} m}}$$

Dvs. $\underline{\underline{|A(\omega)|_{min} = 1.67 \cdot 10^{-9} m}}$

Oppgave 2

a) Wiens forskyvningslov (fra formelsaml.):

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{T} = \frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{5800} = \underline{\underline{5\cdot10^{-7}\,m = 500\,nm}}$$

Planck's strålingsformel:

$$M(\lambda,T)\,d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\,d\lambda$$

Skifter variabel:

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \Rightarrow dx = -\frac{hc}{\lambda^2 kT}\,d\lambda$$

$$\Rightarrow d\lambda = -\frac{\lambda^2 kT}{hc}\,dx$$

$$M(\lambda,T)\,d\lambda = -\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{\lambda^2 kT}{hc}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\,dx$$

$$= -\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\frac{x^3}{e^x-1}\,dx = K\frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

hvor $K = -\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4$

Vi får:

$$\int_0^\infty M(\lambda,T)\,d\lambda = K\int_\infty^0 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

og $$\int_\infty^\lambda M(\lambda,T)\,d\lambda = K\int_0^y \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = K\,I(y)$$

hvor $I(y)$ er det tabulerte integral.

$$x = \frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda} = \frac{6.63\cdot10^{-34}\cdot 3\cdot10^{8}}{1.38\cdot10^{-23}\cdot 5800}\frac{1}{\lambda} = 2{,}485\cdot10^{-6}\,\frac{1}{\lambda}$$

$$x(\lambda = 400\,\mathrm{nm}) = 2{,}485\cdot10^{-6}\,\frac{1}{400\cdot10^{-9}} = 6{,}2125$$

$$x(\lambda = 700\,\mathrm{nm}) = 2{,}485\cdot10^{-6}\,\frac{1}{700\cdot10^{-9}} = 3{,}55$$

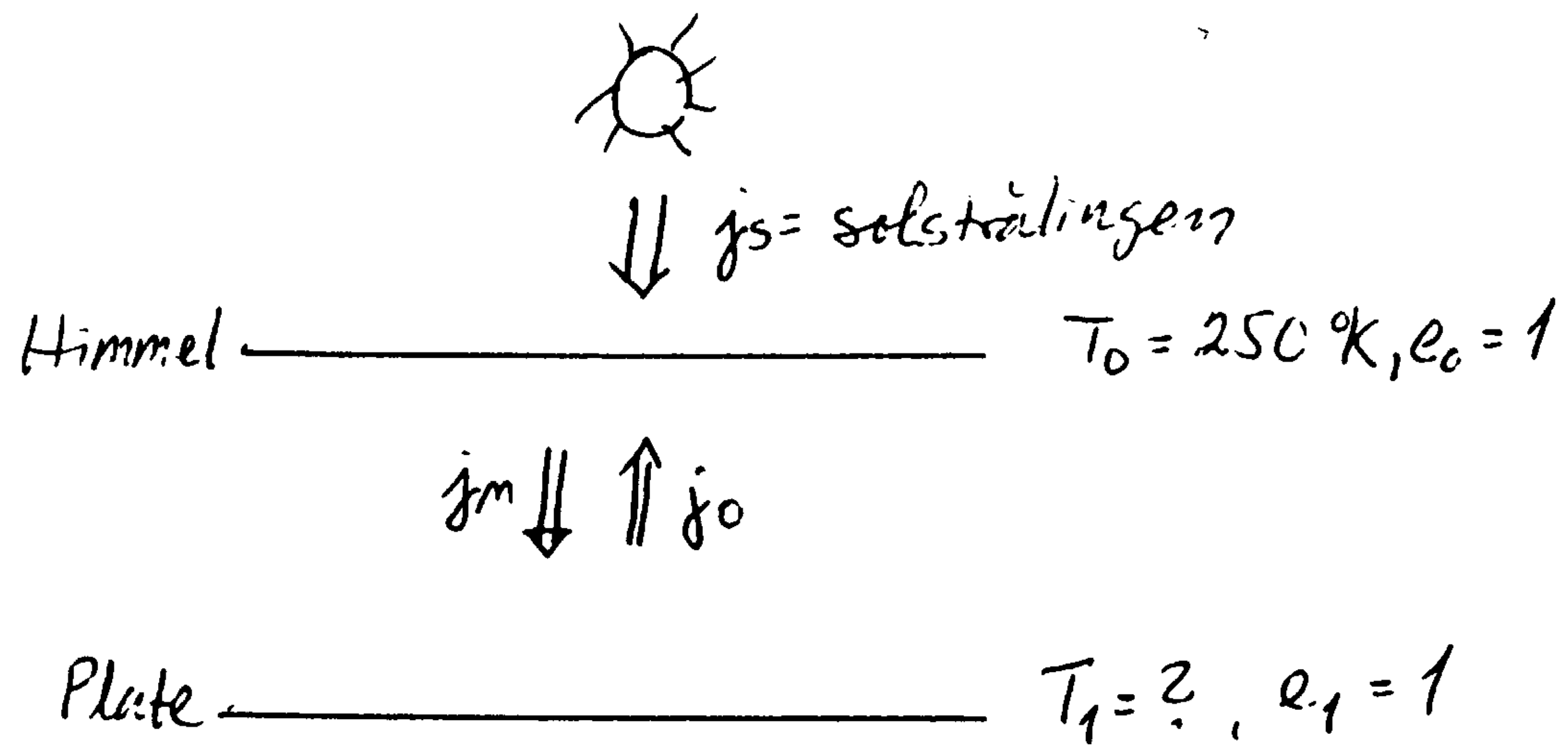
Brøkdel av total utstråling innenfor det synlige området blir derfor:

$$\eta = \frac{\int_\infty^{400\,\mathrm{nm}} M(\lambda,T)\,d\lambda - \int_\infty^{700\,\mathrm{nm}} M(\lambda,T)\,d\lambda}{\int_\infty^0 M(\lambda,T)\,d\lambda} = \frac{I(6{,}2125) - I(3{,}55)}{I(\infty)}$$

som av vedlagte tabell gir

$$\eta = \frac{5{,}69 - 3.37}{6{,}49} = \underline{\underline{0{,}357}} \sim \underline{\underline{36\,\%}}$$

b)



j_n = varmestrøm nedover
j_o = — " — oppover

$$j_n = \sigma T_0^4 + j_s$$
$$j_o = \sigma T_1^4$$

Ved likevekt er $j_n = j_o \Rightarrow$

$$\sigma (T_1^4 - T_0^4) = j_s = 0.8\ kW/m^2$$

$$T_1^4 = \frac{800}{\sigma} + T_0^4 = \frac{800}{5{,}67 \cdot 10^{-8}} + 250^4 = 180{,}16 \cdot 10^8$$

$$T_1 = (180{,}16 \cdot 10^8)^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{366{,}4\ °K}} \Rightarrow \underline{\underline{t = 93{,}4\ °C}}$$

Kan betrakte himmel–plate som et dobbeltvindu og bruke „dobbeltvindu-formelen":

$$j_{netto} = \frac{e_0 e_1 \sigma (T_1^4 - T_0^4)}{e_0 + e_1 - e_0 e_1} = j_s$$

som for $e_0 = e_1 = 1$ gir

$$\sigma (T_1^4 - T_0^4) = j_s$$

c) Brøkdel av stråling ikke absorbert
= brøkdel av stråling reflektert.

Refleksjonskoeffisient $r = (1-e)$

For $\lambda \leq 1{,}5\,\mu m$ er $e_1 = 1 \Rightarrow r_1 = 0$

Vi må derfor finne brøkdel av sol-stråling med $\lambda > 1{,}5\,\mu m$.

Vi har

$$X(\lambda = 1{,}5\,\mu m) = 2{,}485 \cdot 10^{-6} \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} = 1{,}657$$

Brøkdel av solstråling med $\lambda > 1{,}5\,\mu m$ =

$$\eta_{\lambda > 1{,}5} = \frac{I(1{,}657)}{I(\infty)} = \frac{0{,}78}{6{,}49}$$

Brøkdel reflektert solstråling blir derfor:

$$\eta_r = (1-e_1)\,\eta_{\lambda > 1{,}5} = 0{,}9\,\frac{0{,}78}{6{,}49} = \underline{\underline{0{,}108}} \sim \underline{\underline{10{,}8\,\%}}$$

Ved beregning av platens temperatur kan vi bruke samme betraktning som under b)

Benytter „dobbeltvinduformelen"
som for $e_0 = 1$ blir

$$j_{netto} = e_1 \sigma (T_1^4 - T_0^4)$$

jnetto blir lik den absorberte solstrålingen : $j_{netto} = (1 - 0{,}108)\, j_s = 0{,}892 j_s$

$$\Rightarrow \quad e_1 \sigma (T_1^4 - T_0^4) = 0{,}892\, j_s$$

$$T_1^4 = T_0^4 + \frac{0{,}892 \cdot j_s}{\sigma \cdot e_1}$$

$$T_1^4 = 250^4 + \frac{0{,}892 \cdot 800}{0.1 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}$$

$$= 39{,}06 \cdot 10^8 + 1258{,}6 \cdot 10^8 = 1{,}297{,}66 \cdot 10^8$$

$$T_1 = (1297{,}66)^{\frac{1}{4}} \cdot 100 = \underline{\underline{600\,°K}} \Rightarrow t_1 = \underline{\underline{327\,°C}}$$

Temperaturøkning i forhold til svart solfanger blir $\Delta t = (600 - 366{,}4) = \underline{\underline{233{,}6\,°C}}$

Av Planck's strålingsformel finner vi hvor stor del av strålingen har $\lambda > 1{,}5\,\mu m$ når temperaturen er $T_1 = 600\ ^\circ K$. Vi får

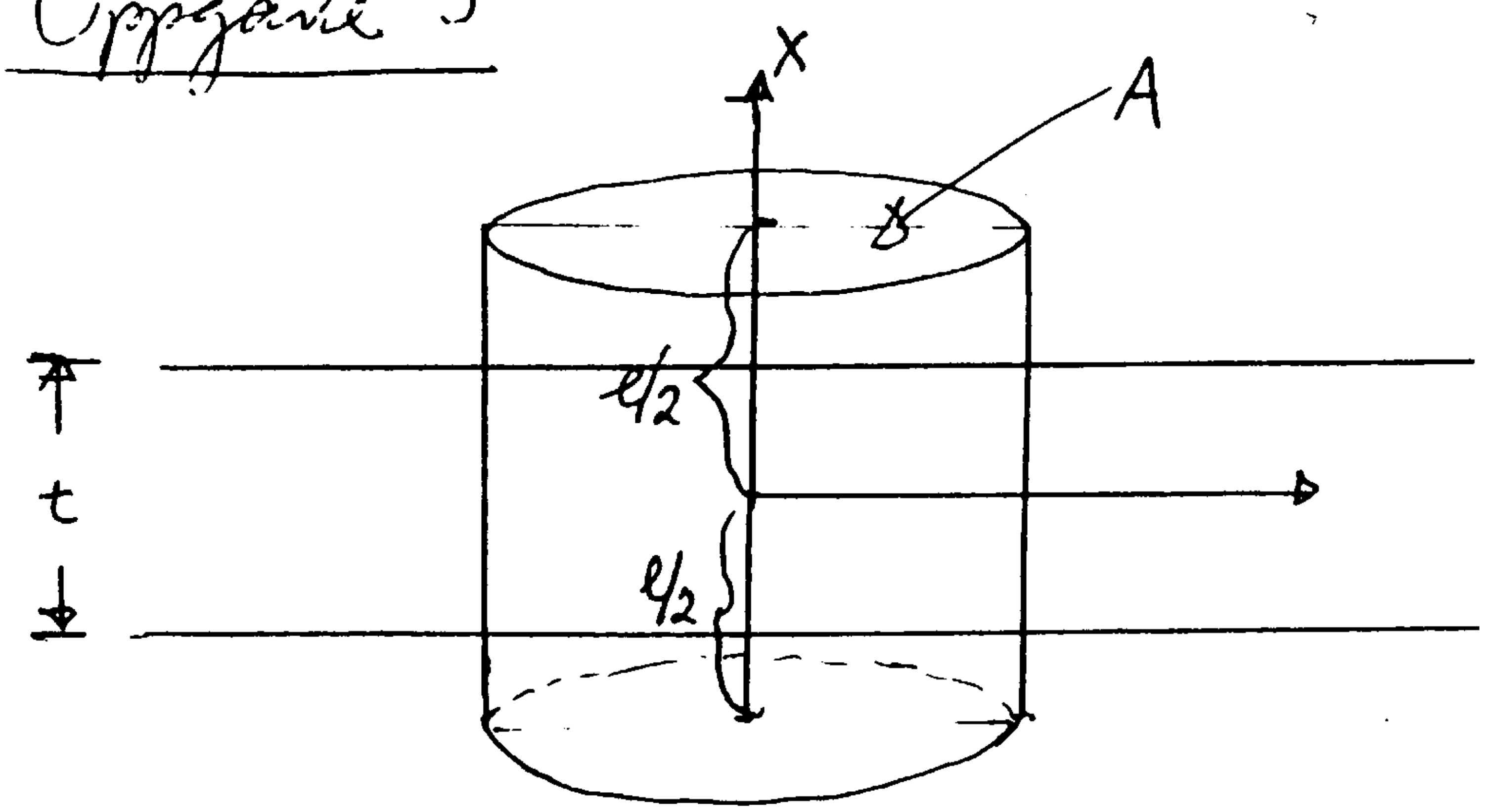
$$X(T=600\,^\circ K,\ \lambda = 1{,}5\,\mu m) = \frac{hc}{k\lambda T} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 600\cdot 1{,}5\cdot 10^{-6}} = 16{,}0$$

Brøkdel av stråling med $\lambda > 1{,}5\,\mu m$, $T = 600\,^\circ K$

$$\eta = \frac{I(16{,}0)}{I(\infty)} = \frac{6{,}493381}{6{,}493939} = 0{,}9999$$

Derfor kan vi se bort fra strålingstap for $\lambda \le 1{,}5\,\mu m$, dvs. bruke $e_1 = 0{,}1$.

Oppgave 3



Vi legger en Gauss-flate i form av en sylinder med lengde l parallelt med x-aksen og med areal av endeflatene lik A gjennom platen. Av symmetribetraktninger er det da klart at E-feltet vil stå normalt på endeflatene av sylinderen og være null normalt på sideflaten og ha samme tallverdi på de to endeflatene.

a) <u>E-feltet</u>

Utenfor platen ($l > t$):

Total ladning innenfor Gauss-flaten:

$$Q_{tot} = A \int_{-t/2}^{t/2} \rho_0 \cos \frac{\pi}{t} x \, dx = A\rho_0 \frac{t}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{t} x \right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$= 2A\rho_0 \frac{t}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \underline{2A\rho_0 \frac{t}{\pi}}$$

Total ladning pr. m^2: $Q = \frac{Q_{tot}}{A} = \underline{2\rho_0 \frac{t}{\pi}}$

Gauss lov:

$$\frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = 2E(x)A = 2A\rho_0 \frac{t}{\epsilon_0 \pi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E(x) = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi}}}$$

$$E(x) = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi} = \underline{\underline{\frac{Q}{2\epsilon_0}}}$$

Dvs. E-feltet utenfor platen avhenger bare av total ladning pr. m^2.

Innenfor platen ($l = 2x < t$)

$$Q_x = A\int_{-x}^{x} \rho_0 \cos(\tfrac{\pi}{t}x)\,dx = A\rho_0 \frac{t}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{t}x\right]_{-x}^{x}$$

$$= \underline{2A\rho_0 \frac{t}{\pi} \sin\frac{\pi}{t}x}$$

Gauss lov:

$$\frac{Q_x}{\epsilon_r} = 2E(x)A = 2A\rho_0 \frac{t}{\epsilon_r \pi} \sin\frac{\pi}{t}x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E(x) = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_r \pi} \sin\frac{\pi}{t}x}}$$

<u>Potensialet</u>:

Vi har: $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\,d\vec{l}$

Innenfor platen ($|x| \leq \frac{t}{2}$)

$$V(x) - V(0) = \int_x^0 E\,dx = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_r \pi}\int_x^0 \sin\frac{\pi}{t}x\,dx$$

$$= -\frac{\rho_0 t}{\epsilon_r \pi}\frac{t}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{t}x\right]_x^0 = -\frac{\rho_0 t^2}{\epsilon_r \pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{t}x\right)$$

Skal sette $V(0) = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{V(x) = -\frac{\rho_0 t^2}{\epsilon_r \pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{t}x\right)}}$$

Utenfor platen $\left(|x| > \frac{t}{2}\right)$

$$V(x) - V\left(\frac{t}{2}\right) = \int_x^{t/2} E\,dx = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi} \int_x^{t/2} dx = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi}\left(\frac{t}{2} - x\right)$$

Vi har:

$$V\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{\rho_0 t^2}{\epsilon_r \pi^2} \implies$$

$$\underline{\underline{V(x) = \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi}\left(\frac{t}{2} - x\right) - \frac{\rho_0 t^2}{\epsilon_r \pi^2} = \frac{\rho_0 t^2}{\pi}\left(\frac{1}{2\epsilon_0} - \frac{1}{\pi \epsilon_r}\right) - \frac{\rho_0 t}{\epsilon_0 \pi} x}}$$

b) Potensialet utenfor platen er av formen:

$$V(x) = A - Bx$$

hvor $B = \frac{\rho_0 t}{\varepsilon_0 \pi} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$

Endring av potensiell energi blir derfor:

$$E_p = e\left[V\left(\tfrac{t}{2} + 30\,\text{cm}\right) - V\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]$$

$$= e\left[A - B\left(\tfrac{t}{2} + 0{,}3\right) - A + B\tfrac{t}{2}\right] = -eB \cdot 0{,}3$$

Dette må være lik endring av kinetisk energi, som hvis elektronet skal stoppe og snu ved platens overflate er lik

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v^2$$

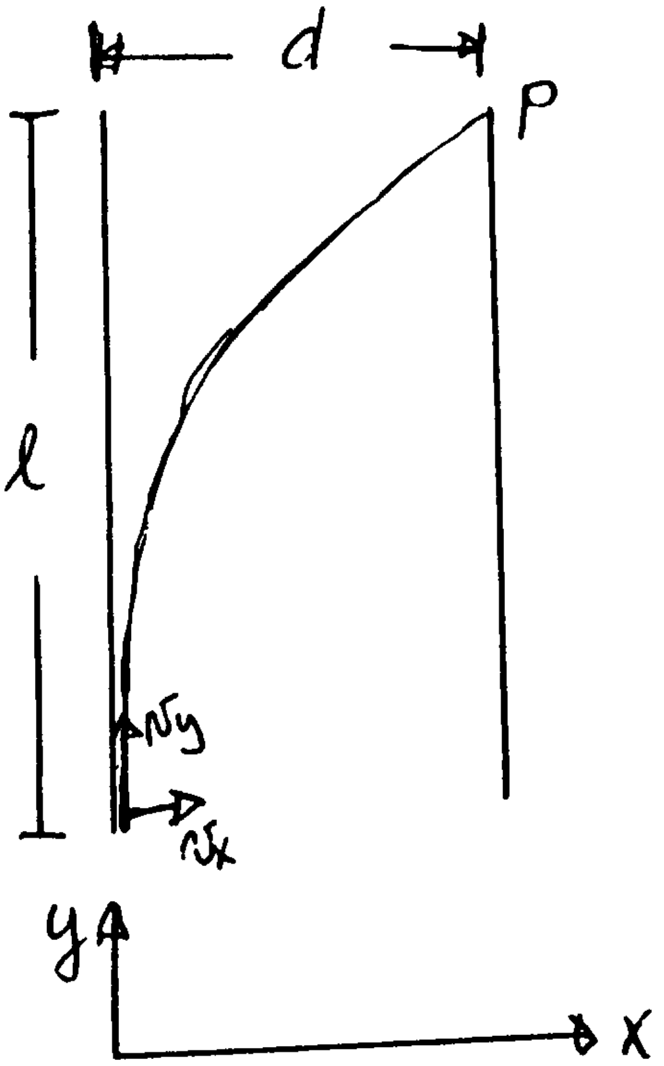
hvor v = starthastigheten. Dette gir:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = -eB \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}3\,|e| \cdot B}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}3\,|e| \cdot Q}{m\varepsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} = \underline{\underline{7{,}72 \cdot 10^{6}\,\text{ms}^{-1}}}$$

c)



$l = 10m$

$d = 2m$

$v_y = 1 ms^{-1}$

Støvpartikkelen må oppfanges når den i yttergrensen kommer inn ved kanten av presipitatoren. Den vil akkurat fanges opp når den lander i motsatt hjørne (merket P)

Kraft på partikkel i x-retning:

$$F_x = Q_0 \cdot E = Q_0 \frac{V}{d} = ma \Rightarrow$$

$$a = Q_0 \frac{V}{dm}$$

$S_x = \frac{1}{2} a t^2$; hvor tiden $t = \frac{l}{v_y}$

$$S_x = d = \frac{1}{2} Q_0 \frac{V}{dm} \left(\frac{l}{v_y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$Q_0 = 2 \frac{d^2}{l^2} \frac{m v_y^2}{V} = \frac{2 \cdot 4}{100} \frac{10^{-14} \cdot 1^2}{50} = \underline{\underline{0{,}16 \cdot 10^{-16} C}}$$