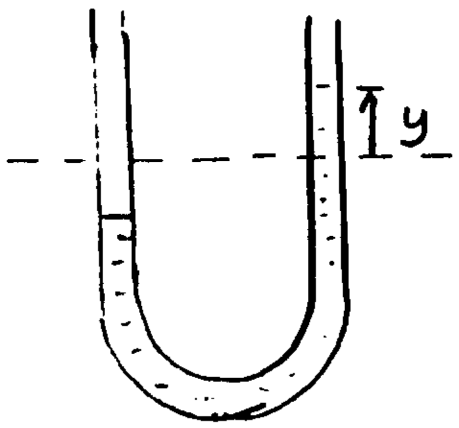
AUD III

LØSNINGSFORSLAG. AUG 90

Oppgave 1.



a)

Kraften som trekker væske-søylen inn mot likevekts-posisjonen er gitt av

$$F_g = -2Ay\cdot\rho\cdot g$$

når forskyvningen ut fra likevektsposisjonen er y slik som vist på figuren.

Dette fører da til følgende bevegelseslikning

$$F_g + F_R = ma = m\ddot{y}$$

med $m = \rho\cdot A\cdot l$.

$\Rightarrow$

$$-2Ay\rho g - \alpha l\dot{y} = \rho A l\ddot{y}$$

Ordner vi dette fås

$$\underline{\ddot{y} + \frac{\alpha}{\rho A}\dot{y} + \frac{2g}{l}y = 0}$$

Som gir

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\alpha}{2\rho A}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}}}$$

b) Differentialligningen har løsning av formen

$$y(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$$

Med $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ når $\gamma < \omega_0$

og $y(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$

når $\gamma > \omega_0$

A og δ eventuelt A og B er konstanter som avhenger av startbetingelsene.

Bevegelsen er underdempet når $\gamma < \omega_0$, overdempet når $\gamma > \omega_0$ og kritisk dempet når $\gamma = \omega_0$

$\gamma = \omega_0$ gir for den kritiske lengde av væskesøylen

$$\left(\frac{\alpha}{2\rho A}\right)^2 = \frac{2g}{l_c}$$

$$\underline{\underline{l_c = \frac{8\rho^2 A^2 g}{\alpha^2}}}$$

$l < l_c$ gir underdempning, $l > l_c$ overdempn.

c) Innsatt tallverdier fås:

$$\underline{\underline{l_c}} = \frac{8\cdot(3{,}8\cdot 10^{-5})^2\cdot 10^6\cdot 9{,}8}{(4{,}8\cdot 10^{-2})^2} = \underline{\underline{49\,m}}$$

d) Max utsving finnes ved derivasjon.
Dette gir max ved en tid t_0, og videre ved t_0+T, t_0+2T osv., T er perioden.
Forholdet mellom to slike max utsving blir derfor

$$p = \frac{y(t_0+T)}{y(t_0)} = \frac{A e^{-\gamma(t_0+T)}\cos(\omega(t_0+T)+\delta)}{A e^{-\gamma t_0}\cos(\omega t_0+\delta)}$$

Siden $\omega T = 2\pi$ får vi

$$\underline{\underline{p = e^{-\gamma T}}} = e^{-\gamma\cdot 2\pi/\omega} \underline{\underline{= e^{-2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}}$$

Med de oppgitte tallverdier fås:

$$\underline{\underline{p = 0{,}40}}$$

Oppgave 2

a) Ovnens energitap på grunn av emittert stråling er

$$J_0 = A \cdot \epsilon \sigma T^4$$

Tilførsel fra omgivelsene er gitt av

$$J_1 = A \cdot \epsilon \sigma T_0^4$$

Her er innstrålingen fra omgivelsene gitt som $A \sigma T_0^4$ og av dette absorberes $A \varepsilon \sigma T_0^4$ av ovnen.

Dette gir:

Netto strålingstap : $A \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4)$

I tillegg til strålingstapet har vi varmeovergang til lufta gitt av: $A \alpha (T - T_0)$. Det totale energitapet vil derfor være gitt av

$$J = A \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4) + A \alpha (T - T_0)$$

b) Varmeovergangstallet α representerer en motstand i et tynt luftskikt inn til ovnen, og som er i ro. Utenfor dette skiktet skjer transport i hovedsak ved konveksjon (+ stråling)

Når arealet avtar vil ovnens overflatetemperatur øke. Når temperaturen øker, vil strålingsbidraget $\sim T^4$ øke mye hurtigere relativt sett enn ledningsbidraget som er proporsjonalt med T.

c)

Ved den oppgitte tilnærmelsen fås

$$J = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot 4(T_0 + \Delta T)^3 (T - T_0) + A\alpha (T - T_0)$$

$$T - T_0 = \frac{J}{A(4\varepsilon\sigma(T_0+\Delta T)^3 + \alpha)}$$

$$T - T_0 = \frac{600}{0{,}8(4 \cdot 0{,}9\ 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 323^3 + 5)}$$

$$= \frac{600}{0{,}8(6{,}88+5)} = 63{,}1\ \text{K}$$

$$\underline{\underline{T = 356{,}1\ \text{K}}}$$

Strålingsdelen utgjør $\frac{6{,}88}{6{,}88+5} = 0{,}58$ ɔ: 58%

For å kontrollere tilnærmelsen gjør vi følgende betraktning

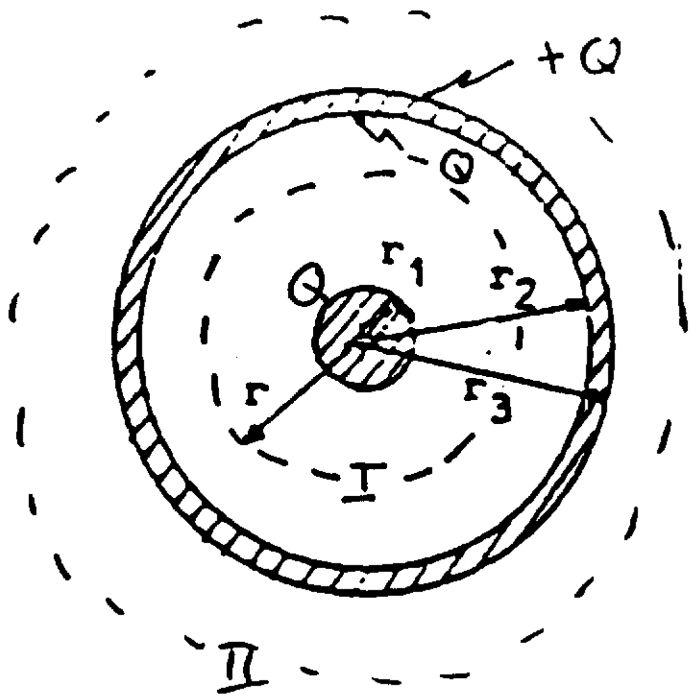
$$T^4 - T_0^4 = (T^2 + T_0^2)(T + T_0)(T - T_0)$$

Man har således erstattet $(T^2 + T_0^2)(T + T_0)$ med $4(T_0 + \Delta T)^3$. Med $T = 356{,}1$ og $T_0 = 293\,K$ kan vi regne oss tilbake til en ny ΔT. Dette gir $\Delta T = 32.5\,K$ og tilnærmelsen er således god.

d) Dersom ovnen ikke er isolert på baksiden øker arealet A til det doble. Dette gir da en temperaturøkning som er noenlunde halvparten av det vi fant under c, noe som igjen vil redusere strålingsdelen mer enn ledningsdelen.

Oppgave 3.

a) Det elektriske feltet i et metall er alltid null. $E = 0$ for $r < r_1$ og for $r_2 < r < r_3$. Gauss lov gir samme resultat. En gaussflate i metallet omslutter ikke noen netto ladning, $E = 0$



For å finne feltet i området mellom kulene legger vi inn en Gaussflate (I) slik som vist på figuren

Dette gir:

$$\int \vec{E}\,\vec{u}_n\,dA = Q/\varepsilon_0$$

$\vec{E}$ er radielt og konstant over Gaussflate

$$E\int dA = Q/\varepsilon_0$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad r_1 < r < r_2$$

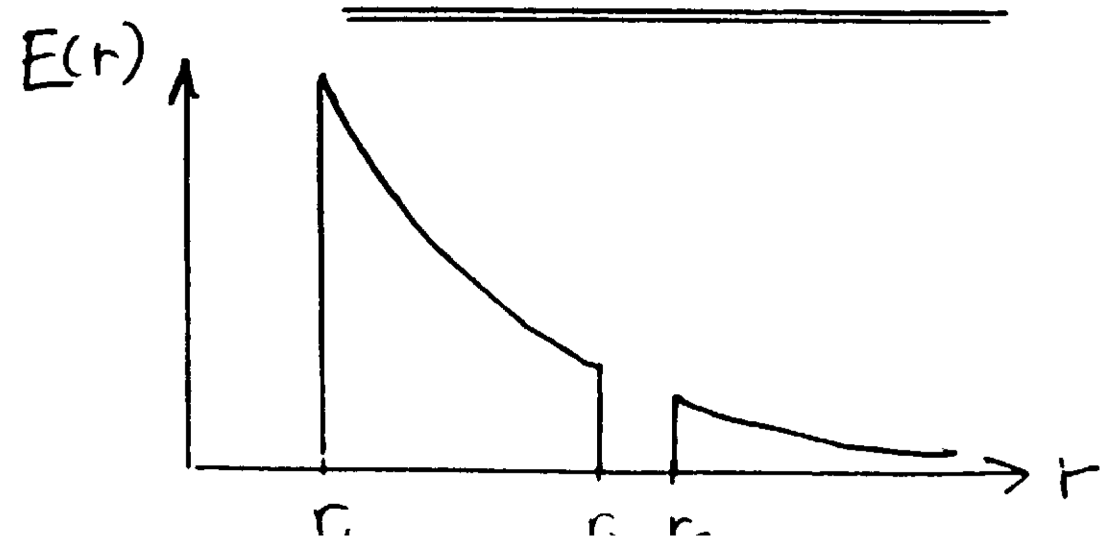
Det ytre kuleskallet er nøytralt. For å få null felt i metallet må det ligge en overflate ladning $-Q$ på innsiden. Dette gir en overflateladning $+Q$ på utsiden

For $r > r_3$ bruker vi Gaussflate II

Det gir

$$E\int dA = \frac{Q - Q + Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\hat{r} \qquad r > r_3$$



b) Feltet mellom kula og kuleskallet blir som under a) Spenningen er gitt av

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \bar{E}\, d\bar{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Fra "definisjonen" på kapasitans $Q = C_1 U$ fås da

$$\underline{\underline{C_1 = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}}$$

Tallverdier:

$$C_1 = \frac{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{0{,}02} - \frac{1}{0{,}025}} = 11{,}12 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

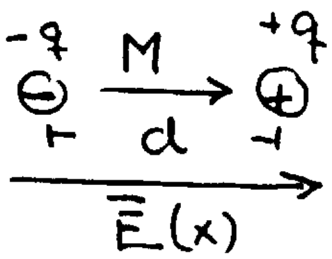
$$\underline{\underline{= 11{,}12\ \mathrm{pF}}}$$

c) Når $r_2 \gg 1$ fås

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1}} = 4\pi\varepsilon_0 r_1$$

Tallverdi $\underline{\underline{C_2 = 11{,}12\ \mathrm{pF}}}$

d)



$$M = q \cdot d$$

$$\vec{F} = -q\,\vec{E}(x) + q\,\vec{E}(x+d)$$

$$= q\,\frac{d\vec{E}}{dx} \cdot d = M \cdot \frac{d\vec{E}}{dx}$$

Regner vi ut dette for vårt tilfelle fås:

$$\vec{F} = -\frac{Q \cdot M}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r^3}$$