OPPGAVE 1

Differensiallignungen er gitt av

$$F_k + F_R = Ma = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

Fjærkrafta er $F_k = -Kx$ og demningskrafta er $F_r = -R\frac{dx}{dt}$. Dette gir totalt

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\gamma = \frac{R}{2M}$$

Den generelle løsning på denne er

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

A og δ er konstanter som avhenger av startbetingelsene

Potensiell energi i systemet er gitt av

$$E = \frac{1}{2}Kx(t)^2 + \frac{1}{2}Mv(t)^2$$

$v(0) = 0$ gir

$$E_0 = \frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}Kx(0)^2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{K}}$$

ɔ: Vi starter med et utsving x_0 og null hastighet når $t=0$. Det gir

$$x_0 = A\cos\delta$$

$$v_0 = -A\omega\sin\delta - \gamma A\cos\delta = 0$$

$$\Rightarrow \tan\delta = -\frac{\gamma}{\omega}, \quad A = \frac{x_0}{\cos\delta} = x_0\sqrt{1 + \gamma^2/\omega^2}$$

b) Den totale energien er gitt av

$$E = E_{POT} + E_{KIN} = \tfrac{1}{2} k\, x(t)^2 + \tfrac{1}{2} M\, v(t)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2} M A^2 e^{-2\gamma t} \big(\omega \sin(\omega t+\delta) - \gamma \cos(\omega t+\delta)\big)^2$$

Siden det er oppgitt at vi bare skal beholde γ i eksponentialuttrykk forenkles dette til

$$E = \tfrac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t+\delta) + \tfrac{1}{2} M A^2 e^{-2\gamma t} \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t+\delta)$$

Her har vi brukt at $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ og vi har sett bort fra γ. Egentlig kunne vi også stryke δ dersom vi antar at startbetingelsene er som under a), der $\delta \sim \gamma$, men dette er ikke nødvendig og resultatet gjelder for alle startbetingelser.

Vi får derfor siden $M\omega_0^2 = k$

$$E = \tfrac{1}{2} k A^2 \big(\sin^2(\omega_0 t+\delta) + \cos^2(\omega_0 t+\delta)\big) e^{-2\gamma t}$$

$$\underline{E = E_0 e^{-2\gamma t}}$$

Energiens tidskonstant blir derfor

$$\tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Med de oppgitte tallverdier fås

$$\underline{\underline{E = 1{,}25 \cdot e^{-5\cdot 2\cdot 0{,}5}}} = \underline{\underline{0{,}102\ \mathrm{J}}}$$

c)

Startbetingelsene blir her at $x_0 = 0$ og $v_0 \neq 0$ når $t = 0$. Dette gir da siden den generelle løsningen for systemet er, regnet i fra det øyeblikk kassa treffer bakken

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta)$$

Dette gir

$$x_0 = 0 = A \cos\delta \qquad \Rightarrow \quad \delta = \pi/2$$

$$t=0 \rightarrow \quad v_0 = v_* = A(-\omega \sin\delta - \gamma \cos\delta)$$

$$v_0 = -A\omega \cdot 1$$

$$A = -v/\omega$$

Løsningen blir derfor

$$x(t) = \frac{v}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$= \frac{v}{\omega} e^{-\gamma t} \sin\omega t$$

Pos x er regnet nedover.

Dette gir til slutt en akselerasjon

$$\ddot{x} = \frac{v}{\omega}\left((-\omega^2 + \gamma^2)\sin\omega t - 2\gamma\omega \cos\omega t\right) e^{-\gamma t}$$

d)

OPPGAVE 2

a) $$J = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot A$$

λ : varmeledningskoeffisient, $\frac{dT}{dx}$: Temp. gradient
A : Tverrsnittsareal for varmestrømmen

Vi har en stasjonær tilstand uten konveksjon dersom vi har en gass/væske mellom to horisontale plater og der $T_{top} > T_{bunn}$

b) Varmestrømmen i ~~?~~ nederste lag er gitt av
$$J = -\lambda_2 \frac{T_0 - T}{b_2} \cdot A$$

og i øverste skikt
$$J = -\lambda_1 \frac{T - T_g}{b_1} \cdot A$$

Disse må være like ved stasjonære forhold

$$\Rightarrow \quad \lambda_2 \frac{T_0 - T}{b_2} = \frac{\lambda_1}{b_1}(T - T_g)$$

$$T\left(\frac{\lambda_1}{b_1} + \frac{\lambda_2}{b_2}\right) = T_0 \frac{\lambda_2}{b_2} + T_g \frac{\lambda_1}{b_1}$$

$$T = \frac{T_0 \frac{\lambda_2}{b_2} + T_g \frac{\lambda_1}{b_1}}{\frac{\lambda_1}{b_1} + \frac{\lambda_2}{b_2}}$$

og dermed J

$$J = A \cdot \frac{\lambda_1}{b_1}(T - T_g) = \frac{\lambda_1}{b_1}\left(\frac{T_0 \frac{\lambda_2}{b_2} + T_g \frac{\lambda_1}{b_1}}{\frac{\lambda_1}{b_1} + \frac{\lambda_2}{b_2}} - T_g\right) A$$

Som gir
$$J = A \frac{T_0 - T_g}{\frac{b_1}{\lambda_1} + \frac{b_2}{\lambda_2}}$$

c) For varmeovergang gjelder

$$J = h \cdot \Delta T \cdot A = h(T_g - T_e) A$$

Dette gir
$$T_g - T_e = \frac{J}{hA} = \frac{440}{8 \cdot 6} = 9{,}2\,C$$

$$\underline{\underline{T_g = 34{,}2\,C}}$$

d) Her kan vi skrive ned svaret direkte

$$J = A \cdot \frac{T_k - T_g}{\frac{b_f}{\lambda_f} + \frac{b_s/2}{\lambda_s}}$$

$$\Rightarrow \quad T_k - T_g = \frac{J}{A} \cdot \left(\frac{b_f}{\lambda_f} + \frac{b_s/2}{\lambda_s} \right)$$

$$= \frac{440}{6} \left(\frac{0{,}01}{0{,}8} + \frac{0{,}02}{4{,}5} \right) = 1{,}9\,C$$

Dette gir
$$\underline{\underline{T_k}} = T_g + 1{,}9 = 34{,}2 + 1{,}9 = \underline{\underline{36{,}1\,C}}$$

Varmetapet nedover mot bakken er gitt av

$$J = A \cdot \frac{T_k - T_0}{\frac{\frac{b_s}{2}}{\lambda_s} + \frac{b_p}{\lambda_p} + \frac{b_b}{\lambda_b}} = 6 \cdot \frac{36{,}1 - 5}{\frac{0{,}02}{1{,}5} + \frac{0{,}05}{0{,}04} + \frac{0{,}1}{1{,}7}} = 149{,}4\,W$$

Med 10 cm polystyren fås

$$J = 6 \cdot \frac{36{,}1 - 5}{\frac{0{,}02}{1{,}5} + \frac{0{,}1}{0{,}04} + \frac{0{,}1}{1{,}7}} = 72{,}5 \text{ W}$$

Besparelsen i varmetap: $\Delta J = 68{,}6 \text{ W}$

Besparelsen i antall kwh

$$\underline{\underline{\Delta W}} = \Delta J \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{9}{12} = \underline{\underline{450{,}7 \text{ kwh}}}$$

OPPGAVE 3

a) Indusert spenning er gitt av

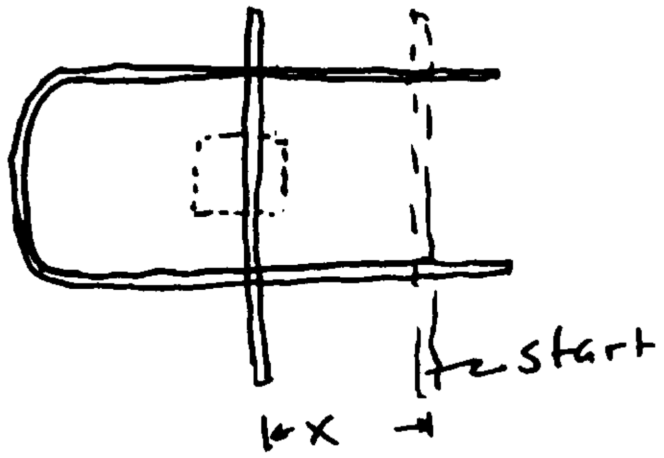
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Vi må dele tidsintervallet i 3 deler.

1) $0 \leq t < 1$ sek

$$\phi = Ba^2 \qquad \frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \mathcal{E} = 0$$

2) $1 \leq t < 2$ sek



$x = vt$

$$\phi = B \cdot a(a+b-vt)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}} = -\frac{d\phi}{dt} = \underline{\underline{B \cdot av}} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3}\,V}}$$

Retning ↻

3) $2 \leq t < 3$ sek

$$\phi = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \mathcal{E} = 0$$

b) Strømmen i sløyfa blir:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1} = 2 \cdot 10^{-3}\,A$$

Generelt har vi

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

Størrelsen på krafta blir her

$$\underline{\underline{F}} = 2\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2 = \underline{\underline{4\cdot 10^{-5}\,N}}$$

Retningen på krafta: Mot bevegelsen.

c) Vi tenker oss skiva delt inn i eker
En stav/eke som beveger seg i et
magnetfelt B med lengde a får
en indusert ems slik som vist under
a)

$$\mathcal{E} = B\cdot a\, v$$

Strømmen i eken er gitt av $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$
Utenfor magnetfeltet sprer strømmen
seg ut slik at den effektive
motstanden blir lik motstanden i
det området der vi har magnetfelt

$$R = \rho\cdot\frac{L}{A} = \rho\cdot\frac{a}{d\cdot a} = \frac{\rho}{d}$$

og $I = \dfrac{B a v d}{\rho}$

Dette gir en kraft $F = B\cdot I\cdot a = \dfrac{B^2 a^2 v d}{\rho}$

Nå er $v = \omega\cdot x$ og dreiemomentet fra
bremsekraften blir:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = F\cdot x = \underline{\underline{\frac{\omega}{\rho}\, a^2 x^2 B^2 d}}$$