**Eksamen i 74181 Optikk, mandag 14. desember 1993 – Løsningsforslag:**

[Trykkfeil i oppgave 1.b) $\beta = -f/d'$ skal være $\beta = -f/d$ ; ble rettet kl. 9.30 under eksamen]

**Oppgave 1**

a) Systemmarise: $\mathbf{M}_{VV'} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f/n \\ -n/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f/n \\ -n/f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10\text{cm} \\ -0.1\text{cm}^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{dd'} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d'/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f/n \\ -n/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d'/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f/n \\ -n/f & -d/f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -d'/f & (f-dd'/f)/n \\ -n/f & -d/f \end{bmatrix}$$

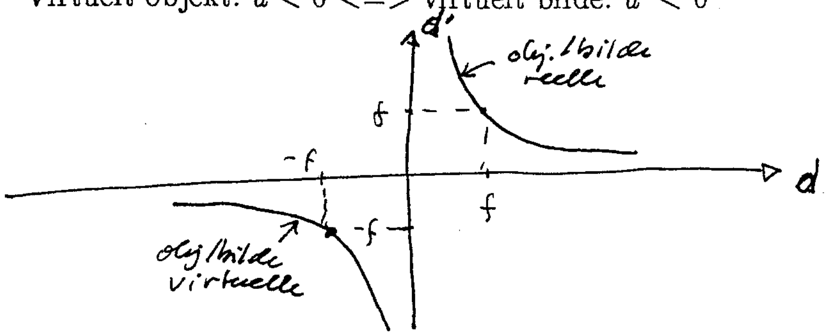
b) Betingelse for avbildning: $B' = 0 \Rightarrow f - dd'/f = 0 \Rightarrow dd' = f^2$.

Forstørrelse: $\beta = A' = -d'/f = 1/D' = -f/d$ [har brukt $A'D' = 1$ ved avbildning].

Av avbildningsrelasjonen (og grafen nedenfor) sees at:

Reelt objekt: $d \geq 0 \Leftrightarrow$ reelt bilde: $d' \geq 0$.

Virtuelt objekt: $d < 0 \Leftrightarrow$ virtuelt bilde: $d' < 0$

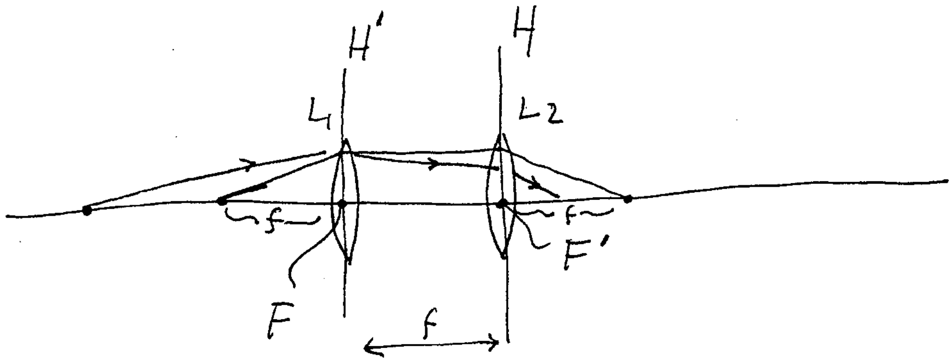



c) Systemet har hovedplan $H$ og $H'$ siden $C \neq 0$. Disse er konjugerte plan i, henholdsvis, objekt og billedrom som avbildes med forstørrelse $\beta = 1$ i avstander $d = h$ og $d' = h'$.

Siden $\beta = A' = 1/D'$ får vi $h = h' = -f = -10$ cm , og vi ser at begge hovedplanene er virtuelle.

Systemets fokallengde er $f$ [siden $C = C' = -n/f$] og når avstander refereres til hovedplanene [slik at $d = h+s$ og $d' = h'+s'$] er avbildningsrelasjonen gitt ved den vanlige linseformelen:

$$1/s + 1/s' = 1/f.$$




d)

Apertureblende: Fysisk blende som avgrenser strålebunt ved avbildning av punkt på aksen.
Inngangspupille: Apertureblenden avbildet til objektrommet
Utgangspupille: Apertureblenden avbildet til billedrommet.
Feltblende: Den av de andre blendene som fysisk avgrenser det knippet av hovedstråler [hovedstråle = stråle gjennom sentum av apertureblenden] som kan trekkes mellom objekt og bilde [en for hvert objektpunkt].
Inngangsvindu: Feltblenden avbildet til objektrommet
Utgangsvindu: Feltblenden avbildet til billedrommet.

$d > f$: Strålebunten fra et punkt på aksen vil konvergere etter $L_1$, dvs. $L_1$ er apertureblende og inngangspupille, mens $L_2$ er feltblende og utgangsvindu. Utgangspupillen (bildet av $L_1$ gjennom $L_2$) ligger i $d' = \infty$, mens inngangsvinduet (bildet av $L_2$ gjennom $L_1$) ligger i $d = \infty$.

$d < f$: Strålebunten fra et punkt på aksen vil divergere etter $L_1$, dvs. $L_2$ er apertureblende og utgangspupille, mens $L_1$ er feltblende og inngangsvindu. Inngangspupillen (bildet av $L_2$ gjennom $L_1$) ligger i $d = \infty$, mens utgangsvinduet (bildet av $L_1$ gjennom $L_2$) ligger i $d' = \infty$.

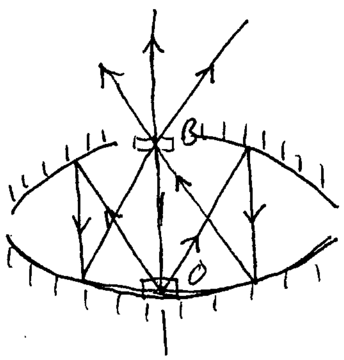
$d = f$: Dette er et spesialtilfelle hvor strålegangen fra et punkt på aksen er parallell mellom de to linsene. Da avgrenses strålebunten like meget av $L_1$ og $L_2$ og det er vilkårlig hvilken av dem vi regner som apertureblende. Hvis vi regner $L_1$ som apertureblende er $L_2$ feltblende, **og omvendt**. I dette tilfellet har vi ikke entydighet i bestemmelsen av aperture– og feltblende.

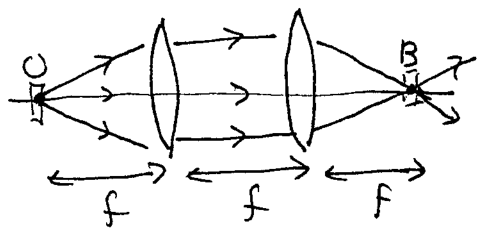
e) For $d > f$ er $L_1$ apertureblende og $L_2$ feltblende (og utgangsvindu). Hovedstrålene (fra sentrum av apertureblenden) er parallelle med aksen i billedrommet. Dermed blir billedfeltets diameter lik $D_2 = D = 2$ cm.
Utgangspupillen ligger i $d' = \infty$ og en randstråle har samme vinkel $v_m'$ for alle billedavstander. Ved å se på en randstråle gjennom sentrum av $L_2$ ser vi at $\sin v_m' \approx v_m' \approx (D_1/2)/f = (D/2)/f$ og blendertallet i billedrommet blir: $F' \approx 1/(2v_m') \approx f/D = 10/2 = 5$.

Vi har 4 brytende flater med transmisjonskoeffisient $\mathcal{T} = 0.98$. Radiansen i billedrommet er dermed $L' = L\mathcal{T}^4$. Irradiansen i et punkt på aksen er $E' \approx L'\Delta\Omega' = L\mathcal{T}^4\Delta\Omega'$ hvor $\Delta\Omega' \approx \pi v_m'^2 \approx \pi(D/f)^2/4 = \pi/(2F')^2$. dvs. $E' = \pi L\mathcal{T}^4/(2F')^2 = \pi\cdot 10\cdot 0.98^4/100\ \mathrm{mW/cm^2} = 0.2898\ \mathrm{mW/cm^2}$.

Siden hovedtstrålene er parallelle med aksen i billedrommet er $\theta' = 0$ for alle billedpunkter, og vi får ingen effekt av $\cos^4$ –loven her. Alle billedpunktene har samme irradians.

f) De to hulspeilene har samme fokallengde $f = R/2$ og avstanden mellom dem er $f$. Vi kaller det øverste hulspeilet for $S_1$ og det nederste for $S_2$. Objektet ligger på $S_2$ og skygger for sitt eget speilbilde i $S_2$, så den avbildningen kan vi se bort fra. Objektet ligger en avstand $f$ fra $S_1$, og stråler fra sentrum av objektet vil reflekteres i $S_1$ og falle inn på $S_2$ parallellt med aksen. Der vil de igjen reflekteres og fokuseres til $S_2$'s fokalpunkt som ligger midt i åpningen til $S_1$. Linseekvivalenten til dette systemet er er to linser med samme fokallengde, med innbyrdes avstand lik fokallengden, og med objektet en fokllengde foran første linse. Dvs. det samme systemet som vi har sett på i resten av oppgaven, med $d = f$, og med $f = R/2$.




**Oppgave 2**

a) Feltet like bak objektet kan skrives $U(x,y,0) = t(x,y)\,U_0(x,y,0)$. Innsatt i diffraksjonsformelen:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik[z + \frac{1}{2z}(x^2+y^2)]} \iint_{-\infty}^{\infty} [t(x',y')\,U_0(x',y',0) e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}}] e^{-ik(xx'+yy')/z}\, dx'dy'$$

Fraunhoferdiffraksjon har vi når uttrykket inni hakeparentesen i integralet er proporsjonalt med $t(x,y)$ slik at integralet blir proporsjonalt med fouriertransformen av $t(x,y)$.
For kulebølgebelysningen her:

$$[t(x',y')U_0(x',y',0)e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}}] = At(x',y')e^{-ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2d}}e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}} \to At(x',y') \text{ for } z \to d.$$

I dette tilfellet har vi altså Fraunhoferdiffraksjon for $z = d$.
For planbølgebelysning har vi ingen fasefaktor i belysningsbølgen som kan motvirke faktoren $e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}}$ og da får vi Fraunhoferdiffraksjon i **fjernsonen**, dvs. når $z$ er så stor at $e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}} \approx 1$ for alle $x',y'$ hvor $t(x',y') \neq 0$.

I vårt tilfelle:

$$U(x,y,d) = \frac{A}{i\lambda d} e^{ik[d+\frac{1}{2d}(x^2+y^2)]} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x',y') e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy'$$

$$= \frac{A}{i\lambda d} e^{ik[d+\frac{1}{2d}(x^2+y^2)]} \qquad T(kx/d, ky/d)$$

hvor $T(k_x,k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) e^{-i(k_x x+k_y y)} dx dy$ er fouriertransformasjonen av objekttransmittansen.

b)

$$T(k_x,k_y) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2}\int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{-i(k_x x+k_y y)} dx dy = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} e^{-ik_y y} dy \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{-ik_x x} dx$$

$x$ og $y$ integralene er av samme form:

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{-ik_x x} dx = \left| \frac{e^{-ik_x x}}{-ik_x} \right|_{-L_x/2}^{L_x/2} = \frac{e^{ik_x L_x/2} - e^{-ik_x L_x/2}}{2ik_x L_x/2} \cdot L_x = L_x \operatorname{sinc}(k_x L_x/2)$$

som ved innsetting gir oppgitt resultat.

Diffraktert felt:

$$U(x,y,d) = \frac{A}{i\lambda d} e^{ik[d+\frac{1}{2d}(x^2+y^2)]} T(kx/d, ky/d)$$

$$= \frac{A}{i\lambda d} e^{ik[d+\frac{1}{2d}(x^2+y^2)]} L_x L_y \mathrm{sinc}[kL_x x/(2d)]\ \mathrm{sinc}[kL_y y/(2d)]$$

Intensitetsfordeling:

$$I(x,y,d) = |U(x,y,d)|^2 = \left(\frac{AL_xL_y}{\lambda d}\right)^2 \mathrm{sinc}^2[kL_x x/(2d)]\mathrm{sinc}^2[kL_y y/(2d)]$$

Siden sinc(0) = 1 fås $I(0,0,d) = \left(\frac{AL_xL_y}{\lambda d}\right)^2$ og det oppgitte resultat.

c)


sinc($x$) har første nullpunkt for $x = \pi$, dvs. første nullpunkt i mønsteret er for $kL_x x/(2d) = \pi L_x x/(\lambda d) = \pi$, eller $x = \lambda d/L_x = 500 \cdot 500/5$ nm $= 5 \cdot 10^{-5}$ m $= 50$ $\mu$m.

Hvis $d$ dobles dobles $x$. Hvis $L_x$ dobles halveres $x$. Hvis $L_x$ og $L_y \to 0$ vil sinc–ene være $\approx 1$, slik at $I(x,y,d) \approx I(0,0,d)$ og det diffrakterte feltet vil være en kulebølge fra sentrum av åpningen.

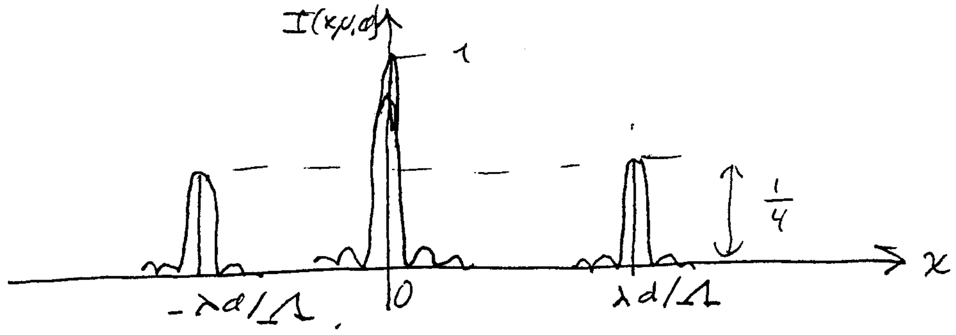
d) Gitterets romfrekvens er $\nu = 1/\Lambda = 1/0.5\ \mathrm{mm}^{-1} = 2\ \mathrm{mm}^{-1}$. Hver fourierkomponent i gitteret gir oss en diffraksjonsorden. De 3 fourierkomponentene er:

$m = 0$: $(1/2)\delta(k_x)$ gir diffraksjonsmønster omkring $x$=0.

$m = 1$: $(1/4)\delta(k_x - 2\pi/\Lambda)$ gir diffraksjonsmønster omkring $x = \lambda d/\Lambda = 500\mu$m $= 0.5$ mm.

$m = -1$: $(1/4)\delta(k_x + 2\pi/\Lambda)$ gir diffraksjonsmønster omkring $x = -\lambda d/\Lambda = -0.5$ mm.

Avstanden mellom diffraksjonsordenene er 10× bredden av hver diffraksjonsorden (jfr.c)).




d) Betingelsen er at avstanden til første nullpunkt, dvs. $x = \lambda d/L_x$ skal være lik $L_x$.
Dvs: $L_x = \sqrt{\lambda d} = 5 \cdot 10^{-4}\text{m} = 0.5$ mm, slik at F' $= d/L_x = \sqrt{d/\lambda} = 1000$.