UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FAG 74225/74226 ATOM- OG KJERNEFYSIKK

Fredag 7. juni 1991
kl. $09^{00} - 15^{00}$

Tillatne hjelpemiddel: Rottmann: *Mathematische Formelsammlung*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*
Godkjend lommekalkulator

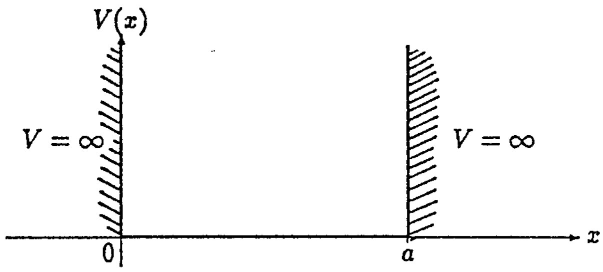
Fagleg kontakt under eksamen:
Professor K. Fossheim
Tlf. 3638

Ved sensur blir oppgåvene 1, 2, 3 og 4 gitt vekt etter forhaldet 2:1:1:0.5.

OPPGÅVE 1

Vi skal studere ein partikkel med masse m i ein eindimensjonal boks med sidekant a. Potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 < x < a \\ \infty & \text{elles} \end{cases} .$$



1 a) Skriv ned Schrödingerlikninga og grensebetingelsane for dette problemet.
2 Bestem energinivåa og eigenfunksjonane.
Ein kvantemekanisk tilstand er karakterisert av eitt sett kvantetal.
3 Kva er kvantetalet i dette tilfellet?
4 Kva skjer med avstanden mellom energinivåa når a veks?

b) Vi generaliserer resultata i punkt a) til 3 dimensjonar. Potensialet er no

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0<x<a \wedge 0<y<b \wedge 0<z<c \\ \infty & \text{elles} \end{cases} .$$

5 Skriv ned Schrödingerlikninga og grensebetingelsane og vis at

$$\psi(x,y,z) = C \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

er ein eigenfunksjon.

6 Uttrykk C, k_x, k_y og k_z ved dimensjonane på boksen.

7 Finn uttrykk for energinivåa.

8 Kva vil det seie at eit energinivå er degenerert?

Finn uttrykk for energien i einingar av $\hbar^2\pi^2/2ma^2$ og bestem kvantetal og degenerasjonsgrad for grunntilstanden og dei 4 lågaste eksiterte nivåa når

9 (i) $a = b = c$

10 (ii) $a = b = 10c$

11 (iii) $b = \frac{10}{11}a$ og $c = \frac{10}{9}a$

12 Kva for (tre) krav må a, b og c tilfredsstille for at systemet vårt ikkje skal vere degenerert?

Vi går så attende til det eindimensjonale problemet.

c) Til slutt i oppgåvesettet er det lista nokre integral som kan vere til nytte.
Anta at den normerte bølgefunksjonen

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{-i4E_1 t/\hbar}\right)$$

der

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \quad .$$

beskriv vår partikkel i boks.

13 Skriv ned Heisenbergs usikkerhetsrelasjon for impuls og posisjon.
Vi definerer

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\\ (\Delta p)^2 &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2\end{aligned}$$

der $\langle\cdots\rangle$ tyder middelverdi.

14 Vis at Δx og Δp i tilstanden $\Psi(x,t)$ tilfredsstiller Heisenbergs usikkerhetsrelasjon. (Det kan løne seg å skifte til ein ny variabel $u = x - a/2$.)

15 Vis at frekvensen ω som middelposisjonen $\langle x\rangle$ oscillerer med, er $3E_1/\hbar$.

Kor lang tid tek det for (middelposisjonen til) partikkelen å flytte seg fra midten av boksen til ytterposisjonen når

16 (i) $m = m_e = 9.1\cdot 10^{-31}$ kg (elektron) og $a = 10^{-10}$ m

17 (ii) $m = m_k = 10$ g (punktforma klinkekule) og $a = 10$ cm

18 Kommentér kort skilnaden mellom svara i punkt (i) og (ii) når vi antar at alderen til universet er ca. 20 milliardar år.
Gitt: $\hbar = 1.054589\cdot 10^{-34}$ J s.

OPPGÅVE 2

19/20 a) Skriv generelle reaksjonslikningar og illustrér dei radioaktive α og β overgangane i energinivådiagram og N-Z diagram (N er nøytrontallet og Z er protontallet).

b) Vi startar med N_0 ustabile kjerner av same slag ved tida $t = 0$.
21 Skriv ned uttrykket for antal ustabile kjerner N som er att etter at desintegrasjonsprosessen har gått ei tid t.
22 Kva er sannsynlegheita for at ei bestemt kjerne skal desintegrere i løpet av tida dt?
23 Kva er halveringstida? Uttrykk denne ved ein eller fleire av storleikane som du har innført tidlegare i oppgåva.
I dag er det 138 gonger fleire ^{238}U kjerner på jorda enn det er ^{235}U kjerner.
24 Kva var denne fordelinga like etter at jorda var danna for 4.5 milliardar år sidan?
Gitt: Halveringstida er $4.468 \cdot 10^9$ år for ^{238}U og $0.704 \cdot 10^9$ år for ^{235}U.

c) Weizsäckers empiriske formel for bindingsenergien til ei kjerne er

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z(Z-1)A^{-1/3} - a_4 (N-Z)^2 A^{-1} + \delta \tag{1}$$

der A, N og Z er masse-, nøytron- og protontalet (respektive),

$$\delta = \begin{cases} +a_5 A^{-3/4} & \text{når } A \text{ og } Z \text{ er like} \\ 0 & \text{når } A \text{ er odde} \\ -a_5 A^{-3/4} & \text{når } A \text{ er like og } Z \text{ er odde} \end{cases}$$

og $a_1 = 15.760\,\text{MeV}$, $a_2 = 17.810\,\text{MeV}$, $a_3 = 0.711\,\text{MeV}$, $a_4 = 23.702\,\text{MeV}$ og $a_5 = 34\,\text{MeV}$.
25 Gjer kort greie for bakgrunnen til dei tre første ledda.
26 Bruk (1) til å finne atommassane i amu for $^{12}_{6}$C, $^{27}_{13}$Al og $^{194}_{79}$Au.
27 Samanlikn resultata med dei tabulerte verdiane $m(^{12}_{6}\text{C}) = 12\,\text{amu}$ (definisjon av amu), $m(^{27}_{13}\text{Al}) = 26.98153\,\text{amu}$ og $m(^{194}_{79}\text{Au}) = 194.965348\,\text{amu}$: Stemmer tala bra overeins?
Gitt: Nøytronmassen $m_n = 1.00866501\,\text{amu}$ og protonmassen $m_p = 1.00727647\,\text{amu}$. $1\,\text{amu} = 1.660566 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 931.502\,\text{MeV}/c^2$ der c er lysfarta.

OPPGÅVE 3

Schrödingerlikninga for den relative rørsla i to-partikkel problemet er

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right]R(r) + V(r)R(r) = E_{\text{rel}}R(r) \tag{2}$$

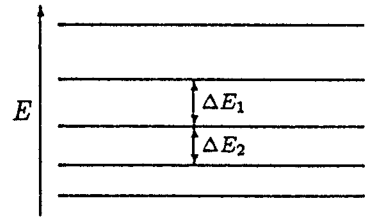
der energien E_{rel} er summen av rotasjons- og vibrasjonsenergiane E_{rot} og E_{vib}.

28/29 a) Anta at avstanden r mellom dei to partiklane skil seg lite frå likevektsavstanden r_0 og skriv ned det kvantemekaniske uttrykket for rotasjonsenergien E_{rot}. Grunngje svaret. Sett namn på storleikane som er med i uttrykket.

30 Vis at i denne tilnærminga er energiskilnaden

$$\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2$$

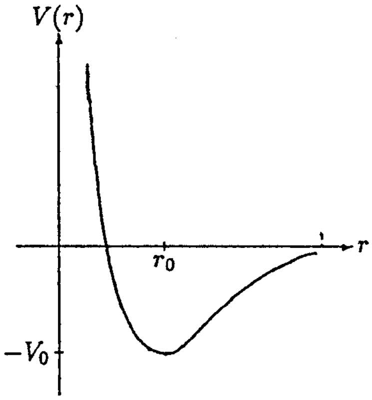
mellom to naboovergangar mellom rotasjonsnivå (sjå figuren) uavhengig av posisjonen på energiaksen.



31 Finn ΔE i eV for O_2 molekylet når avstanden mellom atomkjernane er $r_0 = 1.21 \cdot 10^{-10}$ m og atommassen til oksygen er $m_O = 2.67 \cdot 10^{-26}$ kg. 1 eV $= 1.602189 \cdot 10^{-19}$ J.

32 b) Ta utgangspunkt i likning (2) og punkt a) og skriv ned likninga for vibrasjonsrørsla.
Typisk form på potensialet $V(r)$ er skissert i figuren (r_0 er den same som i punkt a)). Nær botnen, $V(r) \approx V(r_0) = -V_0$, er potensialet tilnærma parabolsk:

$$V(r) \approx -V_0 + \tfrac{1}{2}K(r - r_0)^2 \quad .$$



33 Vis med utgangspunkt i likning (2) at vibrasjonen då er som for ein harmonisk oscillator. Hint: Skriv først $U(r) = rR(r)$. Innfør deretter $x = r - r_0$, $u(x) = U(x + r_0)$ og $\varepsilon = E_{\text{vib}} + V_0$.

34 Skriv ned uttrykket for vibrasjonsenergien E_{vib}.

35 Finn minimumsenergien for O_2 molekylet når $V_0 = 5.2$ eV og $K = 1.2 \cdot 10^3$ J/m^2.

36 c) Samanlikn karakteristiske verdiar for E_{rot} og E_{vib}: Kva for rørsle vil først bli eksitert når temperaturen blir auka frå det absolutte nullpunktet?

37 Vil O_2 være i eksiterte rotasjons- og/eller vibrasjonstilstander ved romtemperatur? Gitt: Boltzmanns konstant er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K

OPPGÅVE 4

I eit Stern-Gerlach eksperiment blir ein stråle med nøytrale hydrogenatom i grunntilstanden sendt langs x-aksen inn i eit inhomogent magnetfelt der $\partial B/\partial z \neq 0$ medan $\partial B/\partial x = \partial B/\partial y = 0$. Det blir observert splitting i 2 strålar.

38 Korleis påviser eksperimentet eit intrinsikt elektronspinn med 2 moglege verdiar når også dreieimpuls av same slag som banedreieimpulsen ville gitt avbøyning?

Det magnetiske momentet til elektronet,

$$M_z = -g_s \frac{e\hbar}{2m_e} m_s \quad ,$$

vekselverkar med magnetfeltet:

$$V = -M_z B_z \quad .$$

39 Finn krafta som verkar på atoma og sørgjer for avbøyinga.

40 Kor stor vinkel dannar dei to utgåande strålane med x-aksen når lengda på magneten er $\ell = 0.1\,\mathrm{m}$, den kinetiske energien til dei innsendte atoma er $E_{\mathrm{kin}} = 10^{-2}\,\mathrm{eV}$, gradienten er $\partial B/\partial z = 3 \cdot 10^2\,\mathrm{T/m}$ og massen til hydrogenatomet er $m_{\mathrm{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$?
Gitt: $g_s = 2$ og $e\hbar/2m_e = 9.27 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}$.

NOKRE INTEGRAL

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(ax)\,dx &= \frac{x}{2} + \frac{\cos(ax)\sin(ax)}{2a} + C \\
\int \sin^2(ax)\,dx &= \frac{x}{2} - \frac{\cos(ax)\sin(ax)}{2a} + C \\
\int x\cos^2(ax)\,dx &= \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(2ax)}{8a^2} + \frac{x\sin(2ax)}{4a} + C \\
\int x\sin^2(ax)\,dx &= \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2} - \frac{x\sin(2ax)}{4a} + C \\
\int x^2\cos^2(ax)\,dx &= \frac{x^3}{6} + \frac{x\cos(2ax)}{4a^2} - \frac{\sin(2ax)}{8a^3} + \frac{x^2\sin(2ax)}{4a} + C \\
\int x^2\sin^2(ax)\,dx &= \frac{x^3}{6} - \frac{x\cos(2ax)}{4a^2} + \frac{\sin(2ax)}{8a^3} - \frac{x^2\sin(2ax)}{4a} + C \\
\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx &= \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + C \\
\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx &= \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + C \\
\int \cos(ax)\sin(bx)\,dx &= \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} + C \\
\int x\cos(ax)\cos(bx)\,dx &= \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)^2} + \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)^2} + \frac{x\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{x\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + C \\
\int x\sin(ax)\sin(bx)\,dx &= \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)^2} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)^2} + \frac{x\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{x\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + C \\
\int x\cos(ax)\sin(bx)\,dx &= \frac{x\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{x\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} - \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)^2} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)^2} + C \\
\int x^2\cos(ax)\sin(bx)\,dx &= \frac{\cos[(a-b)x]}{(a-b)^3} + \frac{\cos[(a+b)x]}{(a+b)^3} + \frac{x^2\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{x^2\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} \\
&\quad - \frac{x\sin[(a-b)x]}{(a-b)^2} + \frac{x\sin[(a+b)x]}{(a+b)^2} + C
\end{aligned}$$