

LØSNINGSFORSLAG
for eksamen i fag
74225/74226
ATOM- OG KJERNEFYSIKK
Fredag 7. juni 1991

OPPGAVE 1

a) Schrödingerligningen for en partikkel i en éndimensjonal boks:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad .$$

Grensebetingelsene:

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad .$$

Løser problemet: Utenfor boksen er $V = \infty$ slik at der er $\psi = 0$, mens inni boksen er $V = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad .$$

Generell løsning:

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad ; \quad k^2 = 2mE/\hbar^2 \quad .$$

Bruker grensebetingelsene:

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ \psi(a) = 0 &\Rightarrow ka = n\pi \quad ; \quad n \text{ er heltallig} \end{aligned}$$

Normering:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx = B^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \\ &= B^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\cos(n\pi x/a) \sin(n\pi x/a)}{2n\pi/a} \right]_0^a = B^2 \frac{a}{2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad . \end{aligned}$$

Egenfunksjonene blir da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

mens energinivåene blir

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad .$$

Kvantetallet (det tallet som karakteriserer tilstanden):

$$n \quad ; \quad \text{heltallig} \quad .$$

Avstanden mellom energinivåer,

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (2n+1) \quad ,$$

avtar når bredden a på boksen øker (uavhengig av n).

b) Schrödingerligningen i tre dimensjoner skiller seg kun litt fra den i én dimensjon:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \right] \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) .$$

Grensebetingelsene er videre:

$$\psi(0, y, z) = \psi(a, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, b, z) = \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, c) = 0 .$$

Setter inn $\psi(x, y, z) = C \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$ og får

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

siden $\partial^2 \sin k_x x / \partial x^2 = -k_x^2 \sin k_x x$. Ser nå at $\psi(x, y, z)$ tilfredsstiller Schrödingerligningen. Grensebetingelsene gir:

$$k_x a = n_x \pi \quad , \quad k_y b = n_y \pi \quad , \quad k_z c = n_z \pi .$$

Normeringskonstanten C finnes ved innsetting i normeringsbetingelsen, som i punkt a):

$$1 = C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z \, dx \, dy \, dz .$$

Her kan integralene over x , y og z gjennomføres separat. Vi nytter resultatet i punkt a) og finner at

$$C = \sqrt{\frac{8}{abc}} .$$

Energivåene finnes fra resultatet av innsettingen over:

$$E = E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) .$$

Når flere forskjellige tilstander har samme energi (nivå), er energinivået degenerert.

Energien, kvantetall og degenerasjonsgrad g for grunntilstanden og de 4 laveste nivåene er satt opp i tabellen (se neste side).

Av uttrykket for energien $E(n_x, n_y, n_z)$ finnes at a/b , a/c og b/c må være irrasjonale tall for at to ulike sett kvantetall (dvs to forskjellige tilstander) ikke skal svare til det samme, degenererte energinivå.

c) Heisenbergs usikkerhetsrelasjon for impuls p og posisjon x :

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar/2 .$$

Bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sin \frac{\pi x}{a} e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-i4E_1 t/\hbar} \right)$$

er en superposisjon av like deler av de to laveste tilstandene i det éndimensjonale partikkel-i-boks problemet.

Trenger middelverdiene av x , p , x^2 og p^2 :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^a \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) \, dx \\ &= \int_0^a x \frac{1}{a} \left[\sin^2 \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(e^{-i3E_1 t/\hbar} + e^{+i3E_1 t/\hbar} \right) + \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \right] dx \\ &= \int_0^a x \frac{1}{a} \left[\sin^2 \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \cos \frac{3E_1 t}{\hbar} + \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \right] dx . \end{aligned}$$

$\frac{E}{\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2}$	(n_x, n_y, n_z)	g	Nivå
Tilfelle (i): $a = b = c$			
3	(1,1,1)	1	Grunntilstanden
6	(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)	3	1. eksiterte
9	(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)	3	2. eksiterte
11	(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1)	3	3. eksiterte
12	(2,2,2)	1	4. eksiterte
Tilfelle (ii): $a = b = 10c$			
102	(1,1,1)	1	Grunntilstanden
105	(1,2,1), (2,1,1)	2	1. eksiterte
108	(2,2,1)	1	2. eksiterte
110	(1,3,1), (3,1,1)	2	3. eksiterte
113	(2,3,1), (3,2,1)	2	4. eksiterte
Tilfelle (iii): $b = \frac{11}{10}a, c = \frac{9}{10}a$			
3.02	(1,1,1)	1	Grunntilstanden
5.45	(1,1,2)	1	1. eksiterte
6.02	(2,1,1)	1	2. eksiterte
6.65	(1,2,1)	1	3. eksiterte
8.45	(2,1,2)	1	4. eksiterte

Har brukt at $e^{-ix} + e^{ix} = 2 \cos x$. Ved hjelp av de oppgitte integralene finnes til slutt at

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2} \cos \frac{3E_1 t}{\hbar}$$

Tilsvarende finnes $\langle x^2 \rangle$ (Her lønner det seg å bytte til en ny variable $u = x - a/2$. Beholdes x som variabel, påtreffes integranden $x^2 \sin ax \sin bx$. Denne finnes ikke i listen bak i oppgavesettet (delvis integrasjon ville løst problemet).), $\langle p \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{5a^2}{16\pi^2} - \frac{16a^2}{9\pi^2} \cos \frac{3E_1 t}{\hbar},$$

$$\langle p \rangle = \int_0^a \Psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx = \frac{8\hbar}{3a} \sin \frac{3E_1 t}{\hbar} \quad \text{og}$$

($\langle p \rangle$ finnes lettest ved å benytte at $\langle p \rangle = md\langle x \rangle/dt$)

$$\langle p^2 \rangle = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2a^2}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \hbar^2 \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{5}{16\pi^2} - \frac{256}{81\pi^4} \cos^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} \right) \left(\frac{5\pi^2}{2} - \frac{64}{9} \sin^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} \right) \right] \\ &= \hbar^2 \left[\frac{5\pi^2}{24} - \frac{25}{32} - \frac{640}{81\pi^2} \cos^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{27} \sin^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} + \frac{20}{9\pi^2} \sin^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} + \frac{16384}{729\pi^4} \sin^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} \cos^2 \frac{3E_1 t}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

Er dette $\geq \hbar^2/4$ for alle t ? *Minimum* finnes for $\cos^2(3E_1 t/\hbar) = 1$, $\sin^2(3E_1 t/\hbar) = 0$:

$$[(\Delta x)^2 (\Delta p)^2]_{\min} = \hbar^2 \left[\frac{5\pi^2}{24} - \frac{25}{32} - \frac{640}{81\pi^2} \right] = 0.47\hbar^2 > \hbar^2/4$$

og Heisenberg kan sove rolig videre: $\Psi(x, t)$ tilfredsstiller usikkerhetsrelasjonen. Uttrykket for middelposisjonen er allerede funnet. Det beskriver en oscillasjon om midten av boksen ($x = a/2$). Utslaget (amplituden) er $16a/9\pi^2 \approx 0.18a$ og frekvensen er

$$\omega = 3E_1/\hbar$$

Tiden t det tar for middelposisjonen å flytte seg fra midten av boksen til ytterposisjonen, er en kvart periode. Altså er

$$t = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4} \frac{2\pi\hbar^2 m a^2}{3\hbar^2 \pi^2} = \frac{m a^2}{3\pi\hbar} .$$

Innsatt for elektronet og klinkekula finnes

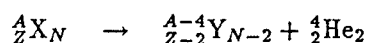
(i) $t_e = 9.1 \cdot 10^{-18} \text{ s}$

(ii) $t_k = 1.0 \cdot 10^{29} \text{ s} = 3.2 \cdot 10^{21} \text{ år}$

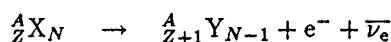
Forskjellen er voldsom! Av størrelsen på t_k sees at klinkekula essensielt ligger i ro — en forflytning i løpet av hele universets alder er ikke observerbar. Dette betyr at det ikke er nødvendig å bruke kvantemekanikk på klinkekuler (eller andre makroskopiske legemer).

OPPGAVE 2

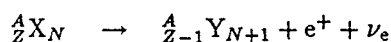
a) α -overgang:



β^- -overgang:



β^+ -overgang:



b)

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

hvor τ er levetiden.

Sannsynligheten p for at en bestemt kjerne skal desintegre i løpet av tiden dt er

$$p = \left| \frac{dN/dt}{N} \right| dt = \frac{1}{\tau} dt$$

— den relative endringen per tidsenhet multiplisert med dt .

Halverinstiden er den tid $t_{1/2}$ det tar før halvparten av kjernene har desintegreert:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} .$$

Tas logaritmen på begge sider, finnes straks at

$$t_{1/2} = \ln 2 \tau .$$

Ved tiden $t = 4.5 \cdot 10^9$ år er forholdet $N(^{238}\text{U})/N(^{235}\text{U}) = 138$. Antallet kjerner er

$$N(^{238}\text{U}) = e^{-t/\tau(^{238}\text{U})} , \quad N(^{235}\text{U}) = e^{-t/\tau(^{235}\text{U})} .$$

Divisjon gir

$$138 = \frac{N_0(^{238}\text{U})}{N_0(^{235}\text{U})} e^{-t(1/\tau(^{238}\text{U}) - 1/\tau(^{235}\text{U}))} = \frac{N_0(^{238}\text{U})}{N_0(^{235}\text{U})} e^{-t \ln 2 (1/\tau(^{238}\text{U}) - 1/\tau(^{235}\text{U}))} .$$

Innsetting av tallverdiene gir endelig forholdet

$$\frac{N_0(^{238}\text{U})}{N_0(^{235}\text{U})} = 3.3 .$$

c) De tre første leddene i Weizsäcker's empiriske formel for bindingsenergien E_b til en kjerne:

1. $a_1 A$: E_b er proporsjonal med antall nukleoner, eller, fordampningsvarmen er proporsjonal med volumet.
2. $-a_2 A^{2/3}$: Overflatenukleonene (radien $\sim A^{1/3}$) har færre naboer å vekselvirke med, slik at disse bidrar mindre til E_b .
3. $-a_3 Z(Z-1)A^{-1/3}$: Coulombfrastøtningen mellom hvert av de Z protonene og de $Z-1$ andre reduserer E_b .

Atommassen er

$$m = Zm_p + Nm_n - E_b/c^2 .$$

Ved å benytte uttrykket for E_b og de oppgitte tallverdiene, finnes — etter noe trykking på kalkulator — atommassene

$$\begin{aligned} m({}^1_6\text{C}) &= 11.997178 \text{ amu} && (\text{relativt avvik: } 2 \cdot 10^{-4}) \\ m({}^{27}_{13}\text{Al}) &= 26.971804 \text{ amu} && (\text{relativt avvik: } 4 \cdot 10^{-4}) \\ m({}^{199}_{79}\text{Au}) &= 193.912942 \text{ amu} && (\text{relativt avvik: } 5 \cdot 10^{-3}) \end{aligned}$$

Overensstemmelsen er svært bra for de to lettest kjernene, og noe dårligere for den tyngste.

OPPGAVE 3

a) Rotasjonsenergien:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 L^2}{2\mu \hbar^2 r_0^2} = \frac{\hbar \ell(\ell+1)}{2\mu r_0^2} .$$

Ved å anta at $r \approx r_0 = \text{konstant}$, gir ligning (2) at

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(0 - \frac{L^2}{\hbar^2 r_0^2} \right) + V(r_0) \right] R(r_0) = ER(r_0) .$$

Dividerer vekk $R(r_0)$ og ender opp med

$$\frac{L^2}{2\mu r_0^2} = E_{\text{rel}} - V(r_0) .$$

At $r \rightarrow r_0$ betyr at vibrasjon neglisjeres, og uttrykket over er da rotasjonsenergien.

I uttrykket for E_{rot} er

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{den reduserte masse} \\ \ell &= \text{banekvantetallet (} L \text{ er banedreieimpulsen)} \end{aligned}$$

(her er m_1 og m_2 massene til de to partiklene).

Energiforskjellen mellom naboovergangene er

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_1 - \Delta E_2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} [\{(\ell+1)(\ell+2) - \ell(\ell+1)\} - \{\ell(\ell+1) - (\ell-1)\ell\}] = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} 2 = \frac{\hbar^2}{\mu r_0^2} \end{aligned}$$

— uavhengig av ℓ , dvs posisjonen på E -aksen.

For O_2 molekylet er

$$\Delta E(\text{O}_2) = 3.56 \cdot 10^{-4} \text{ eV} .$$

b) Radialbevegelse: Fjernes rotasjonsbidraget (se punkt a)), reduserer ligning (2) seg til

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + V(r) \right] R(r) = E_{\text{vib}} R(r) \quad .$$

Nær bunnen:

$$V(r) \approx -V_0 + \frac{1}{2} K (r - r_0)^2 \quad .$$

Ser på derivasjonsleddet:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') = \frac{1}{r^2} (2rR' + r^2 R'') = \frac{2}{r} R' + R''$$

Dette er det samme som

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R + rR') = \frac{1}{r} (2R' + rR'')$$

slik at (det som er igjen av) ligning (2) kan skrives

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) + \frac{1}{2} K (r - r_0)^2 = (E_{\text{vib}} + V_0) U(r)$$

eller

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) + \frac{1}{2} K x^2 u(x) = \varepsilon u(x) \quad ;$$

— ligningen for en éndimensjonal harmonisk oscillator med frekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

(da er potensialet lik $\frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2$).

Vibrasjonsenergien er da, siden $\varepsilon = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$,

$$E_{\text{vib}} = \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - V_0 \quad ; \quad n \text{ er heltallig} \quad .$$

Minimumsenergien (relativt bunnen $-V_0$) for O_2 er

$$E_{\text{min}} = \frac{1}{2} \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\frac{K}{\mu}} = 9.9 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \approx 0.1 \text{ eV} \quad .$$

c) Typisk rotasjonsenergi:

$$E_{\text{rot}}^0 = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \quad .$$

Typisk vibrasjonsenergi:

$$E_{\text{vib}}^0 = \hbar \omega = 0.2 \text{ eV} \quad .$$

Ser at E_{vib}^0 er mye mindre enn E_{rot}^0 , dvs at rotasjon blir først eksitert.

Ved romtemperatur $T \sim 300 \text{ K}$ er typisk termisk energi lik $k_{\text{B}} T = 26 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$. Denne er for liten til å eksitere vibrasjon, men stor nok til å eksitere rotasjon. Derfor er kun rotasjon eksitert ved romtemperatur.