UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E.H. Hauge Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 74226 ATOM OG KJERNEFYSIKK

Torsdag 13. august 1992

kl.0900-1500

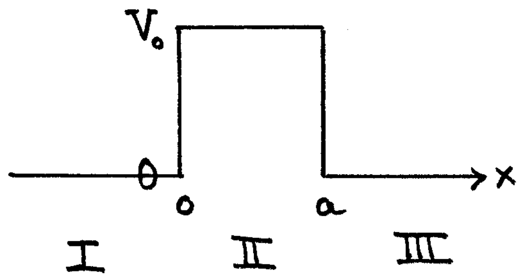
Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

NB.
1. Mange av punktene i oppgavene kan besvares uavhengig av hverandre.
2. Hvert av de 12 oppgavepunktene i settet teller i utgangspunktet likt.
3. Verdier på naturkonstanter er vedlagt oppgavesettet.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på tunnelering av partikler gjennom en barriere, i én romdimensjon.

Barrieren, som vist på figuren, har høyde V_0 og tykkelse a. Vi sender en partikkelstråle, beskrevet av en plan bølge e^{ikx}, fra venstre inn mot barrieren. Partikkelenergien, $E = \hbar^2k^2/2m$ er <u>mindre</u> enn barrierehøyden V_0.



a Hva ville skje ifølge klassisk fysikk, i dette tilfellet? Skriv ned den tidsuavhengige Schrodingerlikningen på den formen den har i de 3 områdene I, II og III i figuren.

Vis at løsningene har formen

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r\,e^{-ikx} & ; \mathrm{I} \\ \alpha e^{\kappa x} + \beta e^{-\kappa x} & ; \mathrm{II} \\ t e^{ikx} & ; \mathrm{III} \end{cases}$$

der r, α, β og t er konstanter. Hvordan avhenger κ av de oppgitte størrelser ?

b Hva er grensebetingelsene som bestemmer r, α, β og t ? (Du skal <u>ikke</u> beregne r, α, β, t !)
Hvilken fysisk tolkning har r og t ?

c Partikkelstrømtettheten er, i kvantemekanikk, generelt gitt som

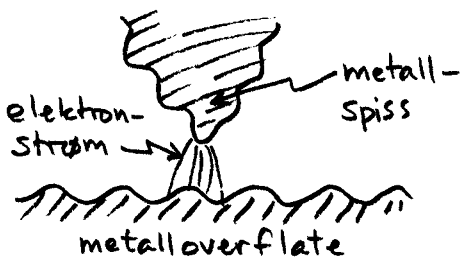
$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left\{\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right\} .$$

Beregn strømtettheten i områdene I, II og III i vårt tilfelle.
Hvilken relasjon mellom r og t følger av dette ?

d Ved å gjennomføre detaljregningen på basis av likningene formulert under pkt. a og b (du skal ikke gjøre dette), kan det vises at for tilstrekkelig store κa ($\kappa a \geq 1$) kan resultatet for transmisjonskoeffisienten i god tilnærmelse skrives som

$$T = |T|^2 \approx pe^{-2\kappa a} .$$

der p er en relativt uinteressant prefaktor av $\mathcal{O}(1)$. Den sentrale delen av et tunneleringsmikroskop er skissert i figuren. Bruk det siterte resultatet for transmisjonskoeffisienten til kort og kvalitativt å forklare tunneleringsmikroskopets virkemåte. Anslå tunneleringsmikroskopets følsomhet, her definert som $f \equiv -T^{-1}\, dT/da$, når (som et typisk eksempel) frigjøringsarbeidet for Ag (den energien som skal til for å trekke et elektron ut av en sølv-overflate) er 4.3 eV.



Oppgave 2

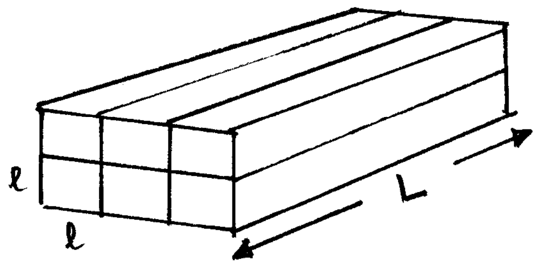
a Vis, ved separasjon av den tidsavhengige Schrodingerlikningen at energinivåene for en partikkel med masse m i en rektangulær boks ($V = 0$ inni, $V = \infty$ utenfor) med sidekanter L_1, L_2 og L_3 er gitt

som

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2\right] .$$

Hva er grunntilstandsenergien med én partikkel i boksen ?
Hva kan en si om degenerasjonsgraden til energinivåene for dette systemet ?

I resten av oppgaven skal vi med utgangspunkt i resultatet ovenfor se på en grov karikatur av et fast stoff som består av lange parallelle polymermolekyler. Vi skal sannsynliggjøre at et materiale av denne typen kan brukes som polariserende glass, slik vi kjenner det fra vanlige solbriller. I vår grove modell er det faste stoffet bygd opp av parallelle rektangulære bokser med én lang sidekant, L og to korte, ℓ . I hver boks er det $N = L/\ell$ frie elektroner. Elektronene kan ikke hoppe fra en boks til en annen. Elektronenes Coulombvekselvirkning neglisjeres. I det følgende skal vi derfor prøve å forstå noen av dette materialets elektroniske egenskaper ved å ta for oss en enkelt avlang boks med N ikke-vekselvirkende elektroner.



b Hva sier Pauliprinsippet om elektronfordelingen over tilstandene i den avlange boksen ?
Anta nå at N-elektron systemet i boksen med $L_1=L=N\ell$, $L_2=L_3=\ell$ er i grunntilstanden. La, for enkelhets skyld, N være et like tall, og vis at det elektronet som i N-elektronsystemets grunntilstand har <u>høyest</u> energi, har energien

$$E_F = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\left(\frac{N/2}{L}\right)^2 + \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{\ell^2}\right] = \frac{9}{8}\,\frac{\hbar^2\pi^2}{m\ell^2} \ .$$

c Finn et uttrykk for energidifferansen, $\Delta E_\perp$, fra N-elektron systemets grunntilstand og opp til den laveste energitilstand med ett av elektronene eksitert "på tvers" [dvs. med $(n_2 = 2,\ n_3 = 1)$ eller $(n_2 = 1,\ n_3 = 2)$]. Energidifferansen $\Delta E_\perp$ blir mindre jo større N er. Har synlig lys med $\lambda = 4000$Å tilstrekkelig energi til å eksitere denne tilstanden, selv når $N \to \infty$? Som typisk verdi for ℓ setter vi $\ell = 3$Å .

d Finn, tilsvarende, et uttrykk for energidifferansen, $\Delta E_{||}$, fra N-elektron systemets grunntilstand til den laveste energitilstanden med ett elektron eksitert "på langs" av boksen.
Hvor stor må N være for at et foton midt i det synlige spektret, med λ = 6000Å, skal ha en energi som er 50 ganger større enn $\Delta E_{||}$?

e Skisser en kvalitativ forklaring på hvorfor brillemateriale som består av lange parallelle polymerer bare slipper gjennom én polarisasjon av synlig lys. Er alle overganger til eksiterte "på langs"- tilstander tillatte, eller finnes det utvalgsregler her ?

Oppgave 3

Deuteronkjernen består av ett proton, p, og ett nøytron, n . Totalt kjernespinn for deuteronet er

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}_p + \vec{S}_n \equiv \vec{L} + \vec{S}$$

der $\vec{L}$ er relativ banedreieimpuls og $\vec{S}_p$ og $\vec{S}_n$ spinnet til henholdsvis proton og nøytron.

a Når vi ser bort fra alle vekselvirkninger, hvilke kvantiseringsregler gjelder for I^2, L^2, S_p^2, S_n^2 og S^2 ? (Mao., hvilke egenverdier har disse kvantemekaniske operatorene ?) Og hvilke kvantiseringsregler gjelder tilsvarende for I_z, L_z, S_{pz}, S_{nz} og S_z ? Uten vekselvirkninger, hvilke spinntilstander er, i prinsipp, mulige ?

b Med notasjonen $^{2s+1}L_i$ for deuterontilstander, vis at før noen eksperimentelle data er brukt, har en, med $\ell \leq 2$, følgende mulige tilstander
$^1S_0$, $^3S_1$, $^1P_1$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$, $^1D_2$, $^3D_1$, $^3D_2$, $^3D_3$.

c Spredningseksperimenter har vist at deuteronets grunntilstand kan beskrives som en lineærkombinasjon av de to tilstandene listet opp under pkt. b som har kjernespinn i=1 , og like (positiv) paritet. Hvilke to tilstander er dette ? Hva kan vi slutte om kjernekreftene på bakgrunn av disse resultatene ?

CONSTANTS AND CONVERSION FACTORS
(to four significant figures)

speed of light	$c = 2.998 \times 10^{8}$ m/s
electron charge unit	$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
Coulomb force constant	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988 \times 10^{9}$ N · m²/C²
	$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.440$ eV · nm
electron mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg $= 0.5110$ MeV/c^2
proton mass	$M_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg $= 938.3$ MeV/c^2
proton–electron mass ratio	$\dfrac{M_p}{m_e} = 1836$
Planck's constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J · s $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV · s
	$hc = 1240$ eV · nm
	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J · s $= 6.582 \times 10^{-16}$ eV · s
	$\hbar c = 197.3$ eV · nm
Avogadro's number	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mole^{-1}
Boltzmann's constant	$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K
electron Compton wavelength	$\dfrac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12}$ m
Bohr radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11}$ m
Rydberg energy unit	$E_0 = 13.61$ eV
Rydberg constant	$R_\infty = 1.097 \times 10^{7}$ m^{-1}
fine structure constant	$\alpha = \dfrac{1}{137.0}$
Bohr magneton	$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}$ A · m² $= 5.788 \times 10^{-9}$ eV/G
nuclear magneton	$\mu_N = 3.152 \times 10^{-12}$ eV/G
gravitational constant	$G = 6.673 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
electron volt	eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J
atomic mass unit	u $= 1.661 \times 10^{-27}$ kg $= 931.5$ MeV/c^2
cross section unit	barn $= 10^{-28}$ m² $= (10$ fm$)^2$
light-year	lt-y $= 9.461 \times 10^{15}$ m