

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E.H. Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 74226 ATOM- OG KJERNEFYSIKK

Lørdag 16. mai 1992

kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

- NB. 1. Mange av punktene i oppgavene kan besvares uavhengig av hverandre.
2. Verdier på naturkonstanter, samt det periodiske system er vedlagt oppgavesettet.

Oppgave I

- a. Skriv ned den tidsavhengige Schrödterlikningen for en partikkel med masse m som beveger seg i et potensial $V(\vec{r})$. Hva er den fysiske tolkning av bølgefunksjonen $\Psi(\vec{r}, t)$? Anta at bølgefunksjonen faktoriserer i en rom- og en tidsfunksjon

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})f(t) .$$

Bestem $f(t)$ eksplisitt, og finn likningen som $\psi(\vec{r})$ må oppfylle. Hvorfor kalles en slik faktorisert løsning stasjonær?

- b. I et kulesymmetrisk potensial $V(r)$ faktoriserer $\psi(\vec{r})$ i en radial- og en vinkeldel,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\vartheta, \phi) .$$

Radiallikningen kan skrives på følgende form (dette skal ikke vises):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} \right] (rR) = E \cdot (rR) .$$

Med Coulombpotensialet, $V(r) = -Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r)$, vis at $R(r) = ce^{-\beta r}$ er en løsning av radiallikningen for bestemte verdier av ℓ , β og E . Bestem disse størrelsene, uttrykt ved parametrene i problemet.

- c. Hva er sannsynligheten, P , for at et av de innerste elektronene (K-elektronene) i et atom med atomnummer Z og massetall A befinner seg innen kjerne­radien $R_A = R_0 A^{\frac{1}{3}}$, der $R_0 = 1,07$ fm.

Skriv svaret på formen

$$P = k A^p Z^q$$

og bestem tallene k, p og q . Hvilken naturlig forekommende radioaktiv prosess er avhengig av at $P > 0$?

- d. Anta at vi kunne bygge en (enkel) kubisk krystall av H-atomer, med gitterkonstant $2/\beta$, der β er bestemt under pkt. b. Hva er massetettheten til en slik krystall? Gi på bakgrunn av denne tallverdien en kvantemekanisk kommentar til det eksperimentelle faktum at gasser forekommer i tettheter som varierer over mange størrelsesordener, mens alle kondenserte faser vi møter i vårt dagligliv har en tetthet i noenlunde nærhet av 1 kg/dm^3 . (Eller, kortere: Gi en QM kommentar til bordverset Theodor!)

Oppgave II

Banedreieimpuls \vec{L} , spinn \vec{S} , total dreieimpuls \vec{J} , og kjernes­pinn \vec{I} er alle størrelser med egenverdilikninger av typen (med \vec{J} valgt som eksempel)

$$J^2 \Phi = \hbar^2 j(j+1) \Phi ; j: \text{positivt hel- eller halvtall}$$

$$J_z \Phi = \hbar m_j \Phi ; m_j = -j, -j+1, \dots, j$$

der Φ er den tilhørende egenfunksjon.

*

- a. Et elektron, med spinn $s = \frac{1}{2}$, er bundet i et kulesymmetrisk potensial $V(r)$ i 3 dimensjoner. Vi ser foreløpig bort fra spinn-bane koplingen. Hvilke av følgende størrelser er bevegelseskonstanter

$$L^2, L_z, S^2, S_z, J^2, J_z,$$

og hvilke kvantetall er "gode"? Gi korte begrunnelser for svarene. Hvilke verdier kan j ta, når l og $s = \frac{1}{2}$ er gitt? Hva er energinivåenes degenerasjonsgrad for gitt l ?

- b. Systemet plasseres nå i et konstant magnetfelt i z-retningen, $\vec{B} = B\hat{z}$, Vis ved et enkelt klassisk resonnement at banedreieimpulsens magnetiske moment er

$$\vec{\mu}_L = -g_L \frac{e}{2m} \vec{L},$$

der $g_L = 1$, e er elementærladningen og m elektronets masse.

Hva er elektronspinnets magnetiske moment?

Hvilket energibidrag fører magnetfeltet til?

Når spinn-bane koplingen stadig vekk neglisjeres, hvilke kvantetall er "gode" med magnetfelt?

Beskriv oppsplittingen av et nivå med gitt ℓ i dette tilfellet, og angi degenerasjonsgraden til de forskjellige nivåene.

- c. Fra nå av tar vi hensyn til at systemets energifunksjon har et spinn-bane ledd av typen

$$V_{SL} = a \vec{S} \cdot \vec{L}$$

der vi (forenklet) regner a som en positiv konstant. Vi ser først på tilfellet $\vec{B} = 0$. Hvilke av størrelsene listet opp under pkt.a er bevegelseskonstanter i dette tilfellet? (Gi korte begrunnelser for svarene.) Hvilke kvantetall er "gode"? Beregn størrelsen på splittingen til et nivå med gitt ℓ og $s = \frac{1}{2}$. Hva er degenerasjonsgraden til de splittede nivåene?

- d. Til slutt tar vi hensyn både til spinn-bane koplingen og til koplingen til ytre magnetfelt. Hvordan splittes energinivåene i dette tilfellet? Bare kvalitative resonnementer kreves, ingen utledning av Lande's g -faktor!

Oppgitt: Lande's g -faktor $g = 1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$.

Oppgave III

a. Beskriv kort hva α -desintegrasjon er, gjerne med referanse til

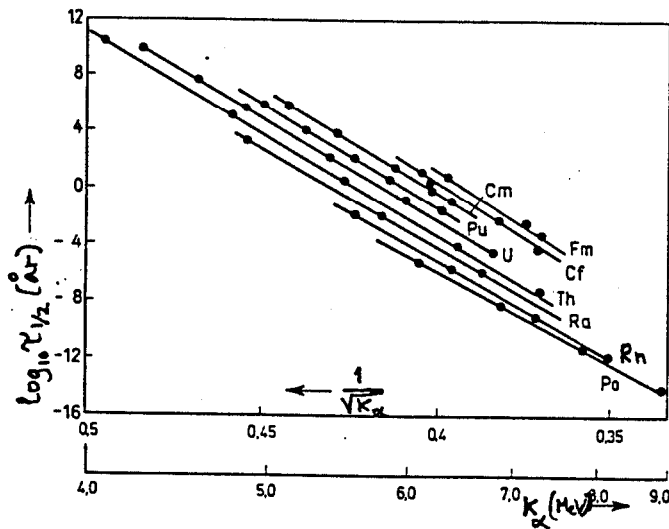


Fig. 1, som gir eksperimentelle resultater for sammenhengen mellom halveringstid og α -partiklenes kinetiske energi, K_α , for forskjellige serier av isotoper. (F.eks.: Linjen som er merket U går gjennom punkter som svarer til forskjellige uranisotoper

Fig.1

med $^{238}_{92}\text{U}$ øverst til venstre og $^{228}_{92}\text{U}$ nederst til høyre). Vis at K_α er gitt som

$$K_\alpha = \frac{Q}{1 + M_\alpha/M_Y}$$

der $Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2$. Hva er den totale kinetiske energien i tyngdepunktsystemet etter desintegrasjonen?

b. Anta at potensialet α -partiklene "ser" kan

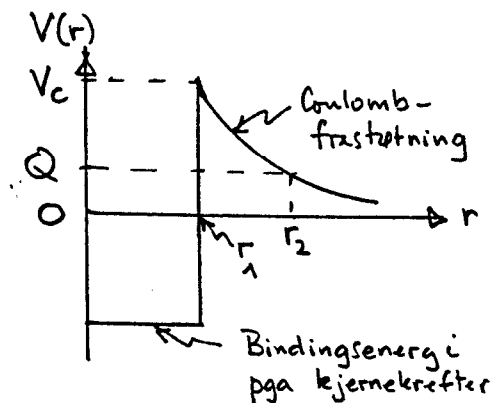


Fig.2

forenkles som vist i Fig. 2. Gjør et overslag over Coulombbarrieren V_c for α -desintegrasjon av $^{238}_{92}\text{U}$, når radien til en vilkårlig kjerne kan uttrykkes som $R = R_0 A^{1/3}$, der $R_0 = 1,07 \text{ fm}$.

- c. Vi følger Gamow og antar at halveringstiden for α -desintegrasjon fullstendig domineres av tunneleringssannsynligheten ut av barrieren, slik at vi kan sette (når en additiv konstant neglisjeres)

$$\log_{10} \tau_{1/2} = \frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2\mu(V(r) - Q)}$$

der μ er α -systemets reduserte masse og $V(r)$ er Coulomb-frastøtningen mellom restkjernen og α -partikkelen.

Vis at til ledende orden i den lille parameteren Q/V_c [der $V_c = C/r_1 = 2Z_Y e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_1)$ er toppen av Coulombbarrieren] kan dette skrives som

$$\log_{10} \tau_{1/2} = \frac{\pi\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{C}{\sqrt{Q}} .$$

- d. Jamfør prediksjonene til dette ledende leddet i Gamows teori med de eksperimentelle resultatene vist i Fig.1.

PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| 1s | 1 H 1.0079 | 2 He 4.0026 | | | | | | | | | | | | |
| 2s | 3 Li 6.941 | 4 Be 9.01218 | | | | | | | | | | | | |
| 3s | 11 Na 22.98977 | 12 Mg 24.305 | | | | | | | | | | | | |
| 4s | 19 K 39.0983 | 20 Ca 40.08 | | | | | | | | | | | | |
| 5s | 37 Rb 85.4678 | 38 Sr 87.62 | | | | | | | | | | | | |
| 6s | 55 Cs 132.9054 | 56 Ba 137.33 | | | | | | | | | | | | |
| 7s | 87 Fr 223 | 88 Ra 226.0254 | | | | | | | | | | | | |
| 3d | 21 Sc 44.9559 | 22 Ti 47.88 | 23 V 50.9415 | 24 Cr 51.996 | 25 Mn 54.9380 | 26 Fe 55.847 | 27 Co 58.9332 | 28 Ni 58.71 | 29 Cu 63.546 | 30 Zn 65.38 | | | | |
| 4d | 39 Y 88.9059 | 40 Zr 91.22 | 41 Nb 92.9064 | 42 Mo 95.94 | 43 Tc 98 | 44 Ru 101.07 | 45 Rh 102.9055 | 46 Pd 106.4 | 47 Ag 107.8682 | 48 Cd 112.41 | | | | |
| 5d | 71 Lu 174.967 | 72 Hf 178.49 | 73 Ta 180.9479 | 74 W 183.85 | 75 Re 186.207 | 76 Os 190.2 | 77 Ir 192.22 | 78 Pt 195.08 | 79 Au 196.9665 | 80 Hg 200.59 | | | | |
| 6d | 103 Lr 260 | 104 Rf* 261 | 105 Ha* 262 | 106 ** 263 | 107 ** 263 | | 109 ** 263 | | | | | | | |
| 4p | 5 B 10.81 | 6 C 12.011 | 7 N 14.0067 | 8 O 15.9994 | 9 F 18.99843 | 10 Ne 20.179 | | | | | | | | |
| 3p | 13 Al 26.98154 | 14 Si 28.0855 | 15 P 30.97376 | 16 S 32.06 | 17 Cl 35.453 | 18 Ar 39.948 | | | | | | | | |
| 4p | 31 Ga 69.72 | 32 Ge 72.6 | 33 As 74.9216 | 34 Se 78.96 | 35 Br 79.904 | 36 Kr 83.80 | | | | | | | | |
| 5p | 49 In 114.82 | 50 Sn 118.71 | 51 Sb 121.75 | 52 Te 127.6 | 53 I 126.905 | 54 Xe 131.29 | | | | | | | | |
| 6p | 81 Tl 204.37 | 82 Pb 207.2 | 83 Bi 208.9804 | 84 Po 209 | 85 At 210 | 86 Rn 222 | | | | | | | | |
| 4f | 57 La 138.9055 | 58 Ce 140.12 | 59 Pr 140.9077 | 60 Nd 144.24 | 61 Pm 145 | 62 Sm 150.4 | 63 Eu 151.96 | 64 Gd 157.25 | 65 Tb 158.9254 | 66 Dy 162.50 | 67 Ho 164.9304 | 68 Er 167.26 | 69 Tm 168.9342 | 70 Yb 173.05 |
| 5f | 89 Ac 227.0277 | 90 Th 232.0381 | 91 Pa 231.036 | 92 U 238.0289 | 93 Np 237.0482 | 94 Pu 244 | 95 Am 243 | 96 Cm 247 | 97 Bk 247 | 98 Cf 251 | 99 Es 252 | 100 Fm 257 | 101 Md 259 | 102 No 259 |

Tabulation is by chemical symbol and atomic number Z. Chemical atomic weights are given in atomic mass units. Quantum numbers at the beginning of each row specify the valence subshell for the electron ground-state configurations.

CONSTANTS AND CONVERSION FACTORS (to four significant figures)

| | |
|-----------------------------|--|
| speed of light | $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ |
| electron charge unit | $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Coulomb force constant | $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ |
| | $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.440 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ |
| electron mass | $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.5110 \text{ MeV}/c^2$ |
| proton mass | $M_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ |
| proton–electron mass ratio | $\frac{M_p}{m_e} = 1836$ |
| Planck's constant | $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ |
| | $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ |
| | $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$ |
| | $\hbar c = 197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ |
| Avogadro's number | $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}$ |
| Boltzmann's constant | $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ |
| electron Compton wavelength | $\frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m}$ |
| Bohr radius | $a_0 = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}$ |
| Rydberg energy unit | $E_0 = 13.61 \text{ eV}$ |
| Rydberg constant | $R_\infty = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ |
| fine structure constant | $\alpha = \frac{1}{137.0}$ |
| Bohr magneton | $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 5.788 \times 10^{-9} \text{ eV/G}$ |
| nuclear magneton | $\mu_N = 3.152 \times 10^{-12} \text{ eV/G}$ |
| gravitational constant | $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ |
| electron volt | $\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ |
| atomic mass unit | $u = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$ |
| cross section unit | $\text{barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = (10 \text{ fm})^2$ |
| light-year | $\text{lt-y} = 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$ |