Løsningsforslag, eksamen 16.5.92 i
Atom- og kjernefysikk

Oppgave I

a Tidsavhengig Schrödinger likning

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec r,t)}{\partial t} = H\Psi(\vec r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec r)\right]\Psi(\vec r,t)$$

$|\Psi(\vec r,t)|^2$ = Sannsynlighetstetthet i rommet, for å finne partikkelen ved $\vec r$, ved tida t.

$$i\hbar\,\psi \frac{df}{dt} = fH\psi \Rightarrow i\hbar\underbrace{\frac{df/dt}{f}}_{\text{uavh. } \vec r} = \underbrace{\frac{H\psi}{\psi}}_{\text{uavh } t} = \lambda$$

$$\Rightarrow f(t) = f(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda t} \quad ; \quad H\psi = \lambda\psi$$

Siste likn. (den tidsuavh. Sch.l.) viser at λ = energiegenverdien til $\psi(\vec r)$: $\lambda = E$. Vi kan fritt velge $f(0)=1$ $\Rightarrow$

$$f(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad ; \quad H\psi(\vec r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec r)\right]\psi(\vec r) = E\psi(\vec r)$$

Stasjonær fordi $|\Psi(\vec r,t)|^2 = |\psi(\vec r)|^2$ er uavh. av tida. Alle tidsuavh. operatorer som repr. fysiske størrelser er tidsuavh.:

$$\langle F\rangle = \int d^3r\, \Psi^*(\vec r,t)\, F(\vec r, \tfrac{\hbar}{i}\nabla)\,\Psi(\vec r,t)$$

$$= \int d^3r\, \psi^*(\vec r)\, F_{op}\,\psi(\vec r) = \text{uavh. } t.$$

b $\frac{d^2}{dr^2}(re^{-\beta r}) = 2(-\beta)e^{-\beta r} + r\beta^2 e^{-\beta r}$

$V(r)\, re^{-\beta r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} e^{-\beta r}$

Derved blir radiallikningen

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-2\beta+\beta^2 r\right]+\left[-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}+\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr}\right]-Er\right\}e^{-\beta r}=0$$

Pot(r): 0 1 0 −1 1

$\Rightarrow$ (i) $\ell = 0$

(ii) $\frac{\hbar^2\beta}{m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{m}{\hbar^2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$

Massen her er, strengt tatt, elektronets <u>reduserte</u> masse, $m = \frac{m_e M}{m_e + M}$ der M er kjernemassen, slik at $\beta = \frac{m}{m_e}\frac{Z}{a_0}$ der $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\cdot\frac{\hbar^2}{m_e}$ er Bohrradien.

(iii) $-\frac{\hbar^2\beta^2}{2m} - E = 0 \Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m}{\hbar^2}\cdot\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$$

c Sannsynligheten for at $r < R_A$ når $R(r) = ce^{-\alpha r}$, er

$$P = \frac{\int_0^{R_A} dr\, r^2 R^2(r)}{\int_0^\infty dr\, r^2 R^2(r)} = \frac{\int_0^{R_A} dr\, r^2 e^{-2\beta r}}{\int_0^\infty dr\, r^2 e^{-2\beta r}}$$

Siden $R_A \ll \beta^{-1}$ kan vi sette $e^{-2\beta r} = 1$ i telleren, slik at

$$P = \frac{\int_0^{R_A} dr\, r^2}{\int_0^\infty dr\, r^2 e^{-2\beta r}} = \frac{\frac{1}{3}R_A^3}{\frac{2!}{(2\beta)^3}} = \frac{4}{3}(R_A\beta)^3$$

$$= \frac{4}{3} R_0^3 \left(\frac{m}{\hbar^2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3 AZ^3$$

Eller
$$P = \frac{4}{3}\left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3 \cdot AZ^3 \qquad (\text{når } m \approx m_e)$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1.07\cdot 10^{-15}}{5.29\cdot 10^{-11}}\right)^3 AZ^3 = 1.1\cdot 10^{-14}\ AZ^3$$

Radioaktiv prosess: Elektron-innfangning:
$$e^- + {}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu$$
↑ elektron-nøytrino

K-elektron (med størst P) innfanges, ved svak vekselvirkning av proton i kjernen.

d Massetetthet i kubisk krystall, med $Z=1$, $M=M_p$
$$\rho = \frac{M_p}{(2/\beta)^3} = \frac{M_p}{(2a_0)^3} = \frac{1.67\cdot 10^{-27}}{(1.06\cdot 10^{-10})^3} = 1.4\cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$
$$= 1.4 \frac{kg}{dm^3}$$

Dette er nettopp hverdagslivets tetthet (størrelsesordensmessig) for kondenserte faser. Denne tettheten er m.a.o. bestemt essensielt av Bohr-radien, dvs av kvantemekanikkens fundamentale avslag mot å klemme ting for mye sammen ($\Delta x \Delta p \approx \hbar$). For tyngre atomer vil massen øke med opptil faktoren 200. På den annen side vil radien for ytterste elektrontilstand øke med hovedkvantetall n, dvs opp til 7, som gir en volumøkning (pr. atom) av samme størrelsesorden som masseøkningen, dvs (omtrent) samme ρ. $\Rightarrow$ Theodors duppi i tinnsoldaten er kvantemekanisk betinget!

Oppgave II

a Uten spinn-bane kopling lever $\vec{L}$ og $\vec{S}$ sine separate liv. S^2 og S_z er bevegelseskonstanter, og med kulesymm. $V(r)$ er også L^2 og L_z det. Derved er også J^2 og J_z bev.konst., og

$$l, m_l, s, m_s, j, m_j$$

er alle "gode kvantetall". Når $s = 1/2$ og l er gitt må

$$j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{for } l \neq 0$$

$$j = \frac{1}{2} \quad l = 0$$

Følger av vektor-bildet, og $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Degenerasjon for gitt l: $m_l = -l, \dots\ l$: $2l+1$

$m_s = \pm\frac{1}{2}$: 2

Tilsammen: $2 \cdot (2l+1)$

b

Sirkelbane med elektron, $-e$. ~~Tallverdier~~

Absoluttverdier:

$$\mu_L = I \cdot A = I \cdot \pi r^2 = \frac{e}{T} \pi r^2$$

omløpstid

$$L = r \cdot p = r \cdot mv = m \frac{2\pi r^2}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \vec{L} = -g_L \frac{e}{2m} \vec{L} \quad \text{med } g_L = 1$$

Spinn: (elektron):

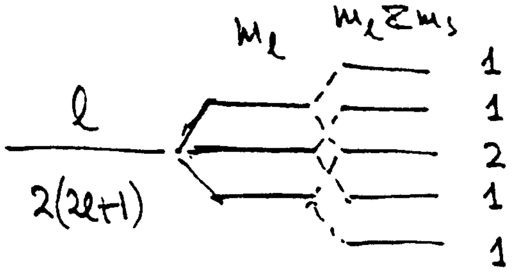
$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m} \vec{S} = -g_S \frac{e}{2m} \vec{S} \quad \text{med } g_S = 2$$

Energibidrag pga $\vec{B}$-feltet

$$V_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{eB}{2m}\left(g_L L_z + g_S S_z\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e\hbar}{2m}}_{\mu_B \text{ Bohr magneton.}} B\left(m_\ell + 2m_s\right)$$

De samme kvantetallene er fortsatt gode, siden $L^2, L_z, S^2, S_z, \cancel{J^2}, J_z$ alle fortsatt er konserverte størrelser. Oppsplitting



Det $2(2\ell+1)$ degenererte nivået splittes i

$2\ell-1$ nivåer med deg.g. 2

og 4 —"— —"— 1

Sjekk:

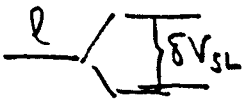
$$2(2\ell-1)+4 = 2(2\ell+1)$$ OK!

c Med $\vec{S}\cdot\vec{L}$ ledd er ikke $\vec{S}$ & $\vec{L}$ konservert hver for seg, bare total dreieimpuls $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$. Da er

S^2, L^2, J^2, J_z konservert.

$s \quad \ell \quad j \quad m_j$ gode kv.t.

Men ikke m_ℓ eller m_s. , Jfr



$$j = \begin{cases} \ell+\frac{1}{2} & \Rightarrow 2j+1 = 2\ell+2 \text{ degenerert} \quad (\ell\neq 0) \\ \ell-\frac{1}{2} & \Rightarrow 2j+1 = 2\ell \quad \text{—"—} \end{cases}$$

Tilsammen $2(2\ell+1)$, OK! Med $\ell=0$: $j=\frac{1}{2}$ $2j+1=2$ deg.gr.

$$V_{SL} = a\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{a}{2}\left(J^2 - S^2 - L^2\right)$$

$$= \frac{a\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right]$$

$\uparrow$ egenverdier

$\ell \neq 0$:

$$s=\tfrac{1}{2} \quad j=\ell+\tfrac{1}{2} \quad V_{SL}^{+} = \frac{a\hbar^2}{2}\left[\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)\left(\ell+\tfrac{3}{2}\right) - \ell(\ell+1) - \tfrac{3}{4}\right]$$

$$= \cdot\cdot\left[2\ell + \tfrac{3}{4} - \ell - \tfrac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{a\hbar^2}{2}\cdot \ell$$

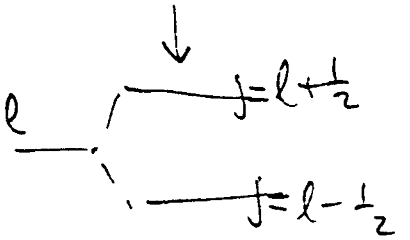
$$s=\tfrac{1}{2} \quad j=\ell-\tfrac{1}{2} \quad V_{SL}^{-} = \frac{a\hbar^2}{2}\left[\left(\ell-\tfrac{1}{2}\right)\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right) - \ell(\ell+1) - \tfrac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{a\hbar^2}{2}\left[-\tfrac{1}{4} - \ell - \tfrac{3}{4}\right] = -\frac{a\hbar^2}{2}(\ell+1)$$

$$\delta V_{SL} = V_{SL}^{+} - V_{SL}^{-} = \frac{a\hbar^2}{2}(2\ell+1)$$

For $\ell=0$: $V_{SL}^{+} = V_{SL}^{-} = \delta V_{SL} = 0$.

d. De to nivåene splittes nå av V_B, men med forskjellige Landé-faktorer. Derved vil all degenerasjon oppheves (unntatt for ekstremt



sterke felt, der V_{SL} kan neglisjeres, og vi er tilbake til pkt. b.)

Oppgave III

a α-desintegrasjon

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \underbrace{{}^{4}_{2}He}_{\alpha\text{-partikkel}}$$

Kinetiske energier varierer bare innen 4–9 MeV.
Halveringstider over 24 størrelsesordener!

X i ro før desintegrasjon:

kin. en.

$$\text{Energibev: } Q \equiv \left(M(X) - M(Y) - M_\alpha\right)c^2 = K_Y + K_\alpha$$

$$\text{Impulsbev: } \vec{p}_Y = -\vec{p}_\alpha = \vec{p}$$

$$Q = \frac{p^2}{2M_Y} + \frac{p^2}{2M_\alpha} = K_\alpha\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right)$$

Tyngdepkt syst. = Lab syst., siden X var i ro før desintegr. Total kin. energi

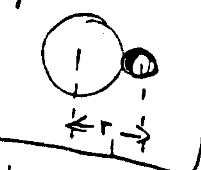
$$Q = K_Y + K_\alpha \overset{\text{Sjekk}}{=} \frac{M_Y + M_\alpha}{2M_YM_\alpha}p^2 = \frac{p^2}{2\mu}$$

red. masse (6

b Radius X_Y : $R_Y = R_0(A-4)^{1/3}$,

" α : $R_\alpha = R_0 \cdot 4^{1/3}$

Fysisk bilde:



$$r_1 = R_Y + R_\alpha = R_0\left[(A-4)^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right]$$

^{238}U:

$$= 1.07 \cdot 10^{-15}\left[234^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= 1.07(6.16 + 1.59)\ \text{fm} = 8.3\ \text{fm}.$$

$$V_c = \frac{e^2 \cdot 90 \cdot 2}{4\pi\varepsilon_0\, 8.3\,\mathrm{fm}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 180 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{8.3 \cdot 10^{-15}}\,\mathrm{eV} = 31\ \mathrm{MeV}$$

Kanskje litt i største laget, siden kjernekreftene rekker noe lenger enn R, og V_c derved reduseres.

c

$$\ln \tau_{1/2} = \frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2\mu\left(V(r) - Q\right)} + \ln P$$

Ifg. Gamow — langsomt varierende prefaktor

{Her er det en lapsus i oppgaveteksten: Overgang til $\log_{10}\tau_{1/2}$, for å kunne sammenlikne mest mulig direkte med figuren, burde ha ført til en ekstra faktor, $\log_{10} e = 0.434..$ foran det analytiske uttrykket.}

Vi trenger integralet

$$I = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{V(r) - Q} = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{C}{r} - Q}$$

der $C/r_2 = Q$ og $C/r_1 = V_c$, med $C = \frac{2Z_Y e^2}{4\pi\varepsilon_0}$

Ny ~~variabel~~: $t^2 = \frac{Q}{C} r \Rightarrow 2t\,dt = \frac{Q}{C} dr$

$$I = \frac{2C}{Q}\int_{t_1}^{t_2} dt\, t\sqrt{\frac{Q}{t^2} - Q} = \frac{2C}{\sqrt{Q}}\int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - t^2}$$

Nå er $t_2 = \sqrt{\frac{Q}{C}\cdot\frac{C}{Q}} = 1$; $t_1 = \sqrt{\frac{Q}{C}\cdot\frac{C}{V_c}} = \sqrt{\frac{Q}{V_c}}$

Med tilnærmelsen $\frac{Q}{V_c} \to 0$ kan vi sette

$$I = \frac{2C}{\sqrt{Q}}\int_0^1 dt \sqrt{1 - t^2} = \frac{2C}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{\pi}{4}\ ; \quad \int_0^1 dt \sqrt{1-t^2} = \text{◔} =$$

$$\Rightarrow \ln \tau_{1/2} = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2\mu} \cdot \frac{2C}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2\mu}\cdot C}{\hbar\sqrt{Q}}$$

qed.

{Det er ikke større verre å løse integralet eksakt:

$$I = \frac{2C}{\sqrt{Q}} \cdot J\left(\frac{Q}{V_c}\right) ; \quad J(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} dt \sqrt{1-t^2} \quad ; \quad t = \cos\varphi$$

$$J(x) = \int_0^{\mathrm{Arccos}\sqrt{x}} d\varphi \sin^2\varphi = \left[\tfrac{1}{2}\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \right]_0^{\mathrm{Arccos}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arccos}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arccos}\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right)$$

$$\overset{x \ll 1}{\approx} \frac{\pi}{4} - \mathcal{O}(\sqrt{x}) . \quad \}$$

d. Først og fremst, med gitt Z_Y (gitt C)

$$\ln \tau_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{Q}} \sim \frac{1}{\sqrt{K_\alpha}}$$

som stemmer meget bra med de rette linjene i fig 1 for $\lg_{10} \tau_{12} \sim 1/\sqrt{K_\alpha}$

Dernest: Koeffisienten til $1/\sqrt{K_\alpha} \sim Z_Y \sim Z_X$, som også stemmer bra: Ganske ekvidistante linjer, der Z øker med 2 fra linje til linje ($_{84}Po$, $_{86}Rn$, $_{88}Ra$, $_{90}Th$, $_{92}U$, ...)

{Det er ikke tilfeldig at bare like-like kjerner er tatt med! Overensstemmelsen med Gamow's prediksjoner er ikke fullt så gode for odde-like og odde-odde }

Helningen kan også sjekkes mot eksp. resultater, men det var ikke meningen her!