UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E.H. Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 74226 ATOM- OG KJERNEFYSIKK
Torsdag 10.juni 1993
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

NB. Mange av punktene i oppgavene kan besvares uavhengig av hverandre.

Oppgave I

a. Den tidsuavhengige Schrödingerlikningen i én romdimensjon lyder

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \ .$$

Hvilken fysisk tolkning har bølgefunksjonen $\psi(x)$?
Hva er uttrykket for forventningsverdiene til, henholdsvis, den kinetiske og til den potensielle energien, når tilstanden $\psi(x)$ er gitt ?

b. Hvilke grensebetingelser må løsninger, $\psi(x)$, av Schrödinger-likningen tilfredsstille ?
La nå potensialet være

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \ . \end{cases}$$

Skisser $V(x)$.
Konstater, ved innsetting i Schrödingerlikningen, hvilken av de 3 følgende tilstander som er en (unormert) egentilstand i dette potensialet,

$$\psi_A = e^{-\alpha x^2} \ ; \ \psi_B = xe^{-\beta x^2} \ ; \ \psi_C = xe^{-\gamma x} \ ,$$

og bestem på denne måten parameteren (α, β eller γ) i eksponenten, samt egentilstandens tilhørende energiegenverdi.

c. Den <u>ordinære</u> harmoniske oscillatoren, der $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ <u>både</u> for $x > 0$ og $x < 0$, har energispektret $E_n = \hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})$, med $n = 0,1,2\ldots$. Bruk dette og paritetsegenskapene til den ordinære oscillatoren til å bestemme samtlige egenverdier i det "halve" oscillatorpotensialet definert i pkt.b. (Du skal ikke <u>løse</u> Schrödingerlikningen generelt for potensialet i pkt.b!)

d. La $\psi(x,t)$ være en lineærkombinasjon av de to laveste energitilstandene i potensialet definert i pkt.b. Vis at sannsynlighetstettheten $P(x,t)$ for denne lineærkombinasjonen er en periodisk funksjon av tida. Bestem perioden, T, og jamfør med perioden, $T_{k\ell}$ for <u>klassisk</u> bevegelse i dette potensialet.

<u>Oppgave II</u>

a. Den kvantemekaniske tilstand for to partikler skrives kompakt som $\Psi(1,2)$ der argumentene 1 og 2 er fellesbetegnelser for både romkoordinater og spinnvariable til partiklene 1 og 2. Dersom de to partiklene er av samme slag ("identiske") må

$$|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2.$$

Hvorfor?

Vis at dette gir opphav til to klasser av partikler, fermioner og bosoner, med forskjellig ombytnings-symmetri. Gi noen eksempler på medlemmer av de to klassene.

*

Vi tar nå for oss He-atomet, der to elektroner er bundet til en kjerne som vi i god tilnærmelse kan regne som uendelig tung (relativt elektronene). Vi neglisjerer videre spinn-bane koplinger (bra tilnærmelse) samt Coulombfrastøtningen elektronene imellom (grov tilnærmelse, som det bør [men ikke i denne oppgaven!] korrigeres for.)

b. Hvor mange <u>spinn</u>tilstander finnes totalt i 2-elektron systemet (vi ser bort fra kjernens spinn)? Skriv ned et uttrykk for hver av disse 2-spinn tilstandene. Hvilke er symmetriske og hvilke antisymmetriske under ombyttet $1 \rightleftarrows 2$?

*

La ϕ_1 og ϕ_2 være de to laveste én-elektron romtilstandene rundt He-kjernen. Begge er s-tilstander med hovedkvantetall, henholdsvis, n=1 og n=2.

*

c. Finn alle de 6 tilstandene som kan konstrueres ved å kombinere romtilstandene ϕ_1 og ϕ_2 (enten begge elektronene i den ene, eller ett elektron i hver) med spinntilstander funnet under pkt.b. Eksempel: En av de 6 tilstandene er

$$\Psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\phi_1(1)\phi_2(2) - \phi_2(1)\phi_1(2)\right\}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\chi_\uparrow(1)\ \chi_\downarrow(2) + \chi_\downarrow(1)\ \chi_\uparrow(2)\right\} .$$

En av de 6 tilstandene representerer He-atomets grunntilstand, og en annen har egenenergi høyere enn He-atomets ioniseringsenergi. Identifiser disse to tilstandene.

d. Kan et He-atom eksitert til tilstanden gitt som eksempel under pkt. c falle ned til grunntilstanden under utsendelse av dipolstråling (elektrisk dipolovergang) ? Dersom nå ϕ_2 oppfattes som tilstanden med $n=2$, $\ell=1$, er en elektrisk dipolovergang til grunntilstanden da mulig ? Gi korte begrunnelser for svarene.

Oppgave III

Von Weizsäckers halvempiriske masseformel gir bindingsenergien, E_b, i en kjerne med nukleontall A og protontall Z som

$$E_b\left({}^{A}_{Z}X\right) = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \epsilon_5 .$$

Her er $a_1, \ldots, a_4$ empirisk bestemte koeffisienter, og leddet ϵ_5 representerer like/odde effekter.

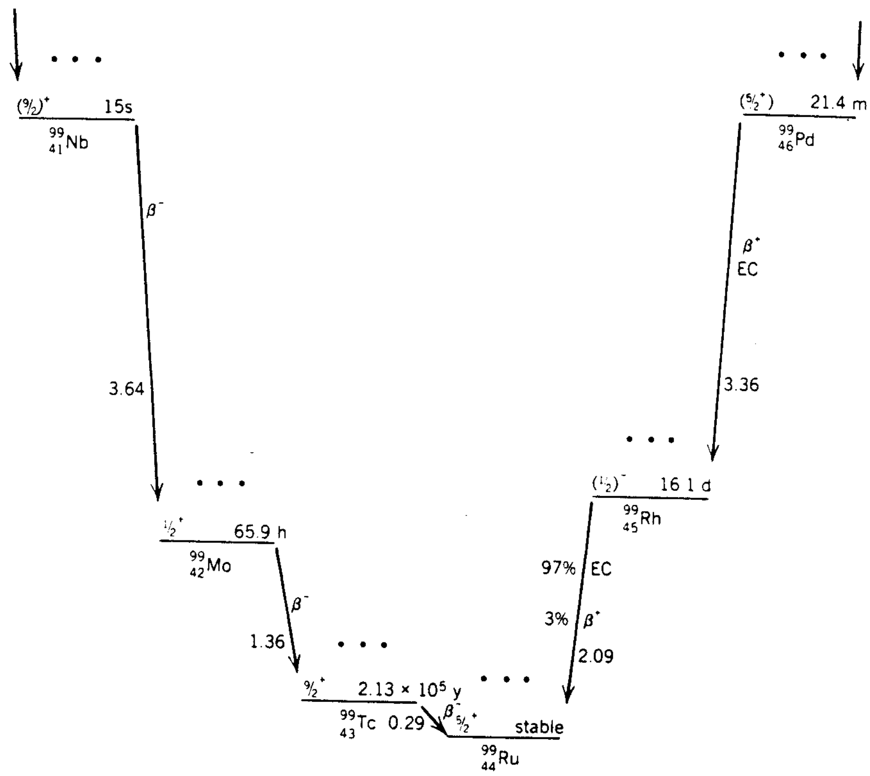
*

a. Gjør kort greie for fysikken bak de 4 første leddene i von Weizsäckers formel.

b. Skisser kjernemassen $M_A(Z)$ som funksjon av Z for konstant A.
Vis at massedifferansen mellom to odde isobare kjerner (A=konst.=odde tall) ifølge von Weizsäckers formel kan skrives som

$$M_A(Z+1)-M_A(Z) = M_p - M_n + \frac{1}{c^2}\left[\frac{a_3}{A^{\frac{1}{3}}}(2Z+1) - \frac{a_4}{A}(A-2Z-1)\right],$$

der M_p er proton- og M_n nøytronmassen.



c. Figuren viser skjematisk hvordan en klasse radioaktive prosesser transformerer ustabile kjerner (halveringstid spesifisert) med A = 99 over til (mer) stabile kjerner med samme nukleontall. Beskriv kort de 3 forskjellige typer prosesser det dreier seg om i dette tilfellet.

d. Vis, ut fra energi- og impulsbevarelse, at en ^{4}He-kjerne emittert i en gitt α-prosess har en bestemt energi. Som kontrast til dette, forklar kort hvorfor et elektron emittert i en gitt β-prosess har et kontinuerlig energispektrum.