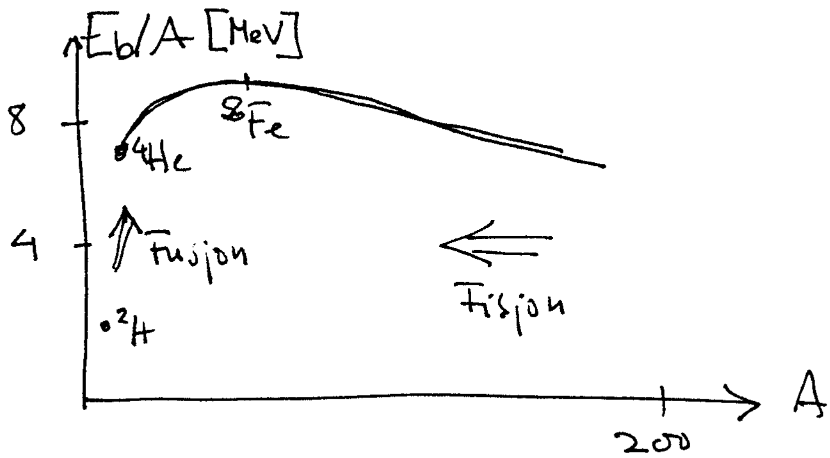
74226 Atom- og kjernefysikk
Kontinuasjonseksamen 7.8.93
Løsningsforslag

Oppgave 1

a



Fisjon: Spalting av tunge kjerner med (asymmetrisk) sum av to lettere kjerner som (typisk) resultat.
Eks: Se pkt. b.

Fusjon: Sammensmeltning av to lette kjerner.
Eks: To deuteroner smeltes sammen til ^4He-kjerne.

Figuren over viser at begge prosessene gir frigjort energi, siden bindingsenergien pr. nukleon er større i sluttproduktet. Fusjon gir åpenbart adskillig større frigjort energi pr. nukleon enn fisjon.

b Frigjort energi: $\Delta E = \sum_{\text{før}} M_i c^2 - \sum_{\text{etter}} M_j c^2$. Her:

$$\Delta E = \left[M(^{235}U) - M(^{94}Zr) - M(^{140}Ce) - M(^1n)\right]c^2$$

$$= \left[235.043928 - 93.906314 - 139.905433 - 1.008665\right] uc^2$$

Vedlagt tabell over kjernemasser (Appendix A i Brehm & Mullin)

"uc^2" ifølge vedlagt tabell over nat.konst.

$$\Delta E = 0.223516 \cdot 931.5 \text{ MeV} = \underline{208.2 \text{ MeV}}$$

Energien fordeler seg som

Kinetisk energi til produkt-kjernene	~	165-170 MeV
—"— nøytronene	~	5
Energi til umiddelbart utsendte γ-stråler	~	7
—"— sekundære —"—	~	6
Energi i β-forfall (nøytrino-delen går tapt!)	~	17-20

{Det var ikke forutsatt at kandidaten skulle huske detaljerte tall her!}

c Kjedereaksjon får en dersom minst ett nøytron skapt i en reaksjon av typen under pkt b genererer en tilsvarende kjerneprosess. [Tapet av nøytroner til vegger og andre "uproduktive" absorbsjons-prosesser må ikke være større enn at en reaksjon genererer enda en, osv.....]

Moderatoren øker sannsynligheten for kjedereaksjon ved at innfangningstverrsnittet for nøytroner er (for ^{235}U) mye større ved termiske energier enn ved 'produksjonsenergien' ~ 5 MeV. Moderatoren bremser ned nøytronene. Lette kjerner er mer effektive enn kjerner med stor masse. Moderatorer i praksis: H_2O, D_2O, grafitt.

d Tyskland er valgt som et mulig eksempel her fordi (i) Norge greier seg utmerket uten kjernekraft, og er derfor et uinteressant land i denne sammenheng. (ii) Frankrike har allerede basert seg på kjernekraft (over 70% av el-kraften) og er derfor i en viss forstand et uinteressant land her.

Tyskland (bl. mange andre) har mot kjernekraft og det diskuteres hvordan den fremtidige energiforsyning skal baseres.

<u>For</u> kjernekraft, f.eks.:

1. Den eneste realistiske (på kortere sikt) mulighet til å redusere CO_2-utslipp med nådagens energiforbruk.

2. Bortsett fra foreldete modeller (Tsjernobyl), meget lav ulykkesfrekvens relativt andre energikilder.

3. Redusert avhengighet av ett labilt olje- (og kanskje gass-) marked.

etc
⋮

<u>Mot</u> kjernekraft, f.eks.

1. <u>Dersom</u> ulykker skjer, vil konsekvensene bli store.

2. Ingen internasjonalt akseptert løsning av avfallsproblemet foreligger ennå. Hittil har 'løsningene' vært midlertidige.

3. Rasjonell håndtering av kjernekraft og avfall forutsetter en sosial disiplin over så store områder og så lange tidsrom (hundreder av år) at historiske erfaringer gir betenkeligheter.

etc
⋮

Kort sagt: <u>Tenk selv</u>!

Oppgave 2

a Notasjon, eks.:

Li: $1s^2 2s = [He]2s$ 1, 2, ... hovedkvantetall til elektron-orbitaler

F: $[He]2s^2 2p^6$

s, p, d, f, ... , orbitaler ordnet etter banedreieimpulsens kvantetall, ℓ.
ℓ: 0, 1, 2, 3, ...

$1s^2 2s$ 2 elektroner (med motsatt spinn) i 1s orbital

... $2p^6$ 6 —"— (med spinn ↑ & ↓) i 3 forskjellige p-orbitaler.

b Elektroner er fermioner, de må ha antisymmetriske bølgefunksjoner ved ombytte, dvs.

$$\Psi(2,1) = -\Psi(1,2)$$

He-atomets grunntilstand er $1s^2$. Dvs. at rom-tilstanden er den samme for begge elektronene

$$\Psi(1,2) = \underbrace{\phi_0(\vec{r}_1)\,\phi_0(\vec{r}_2)}_{\text{Symm. rom-del}}\ \chi^A(1,2)$$

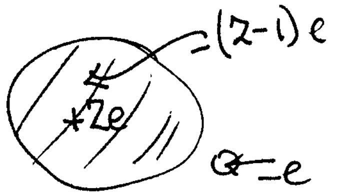
antisym spinndel.

$$\Rightarrow \qquad \chi^A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_\uparrow(1)\chi_\downarrow(2) - \chi_\downarrow(1)\chi_\uparrow(2)\right)$$

normeringsfaktor.

c Ioniseringsenergien er den minimale energi som må tilføres et atom i grunntilstanden for å få fjernet ett elektron fra atomet.

Li, Na & K er alle alkalimetaller med ett valenselektron utenfor lukkete (fylte) skall.



Groveste modell: Valenselektronet <u>utenfor</u> nettoladningen +e.

Hovedkvantetallet til valenselektronet er (når lavere tilstander er fylte skall, utilgjengelige ifølge Pauli-prinsippet)

Li: $n=2$; Na: $n=3$; K: $n=4$.

Med hele nettoladningen innenfor valenselektronets bane reduserer problemet seg til et hydrogen-atom problem. Ioniseringsenergien til H er 13.6 eV. Denne groveste modellen gir da

$$E_I^{(0)} = E_I^{H}/n^2 : \quad \underset{\text{Li}}{3.4\,\text{eV}},\quad \underset{\text{Na}}{1.5\,\text{eV}},\quad \underset{\text{K}}{0.9\,\text{eV}}$$

<u>d</u> Tabellen gir som eksperimentelle verdier:

$$E_I^{Li} = 5.39\,\text{eV} \;;\; E_I^{Na} = 5.14\,\text{eV} \;;\; E_I^{K} = 4.34\,\text{eV}$$

Altså: Eksperimentelt er

(i) Alle bindingsenergiene <u>større</u> enn modellens.
(ii) De faller av med høyere Z, <u>som</u> i modellen.
(iii) De faller av mye <u>langsommere</u> enn i modellen.

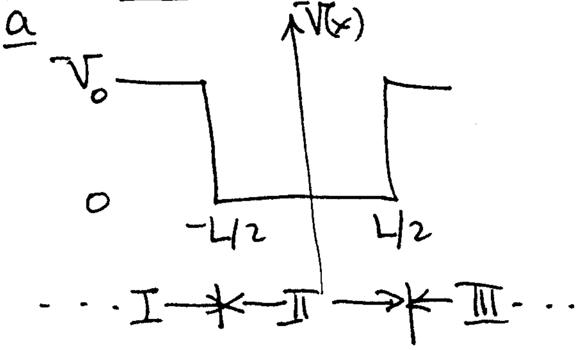
Avviket har sammenheng med at $|\psi^{\text{valens}}|^2 \neq 0$ <u>også</u> i det området der lavere elektroner lever. Skallene innenfor valenselektronet vil derfor <u>ikke</u> fullstendig avskjerme $(Z-1)e$. Dermed: Den effektive ladning "sett" av valens-elektronet er <u>større</u> enn +e. ⇒ Kraftigere binding.

Viktigere korreksjon for store n!

<u>Hele</u> historien er, selvsagt!, temmelig omfattende!

Oppgave 3

a



Schrödingerlikningen i 3 områder:

$$\text{I}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = (E - V_0)\,\psi(x)$$

$$\text{II}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\,\psi(x)$$

$$\text{III}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = (E - V_0)\,\psi(x)$$

Løsningene må ha formen, når $E < V_0$ (bundne tilstander):

$$\text{I}: \quad \psi_{\text{I}} = Ae^{Kx} + \cancel{Be^{-Kx}} \qquad \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = V_0 - E$$

↑ ikke integrerbar

$$\text{II}: \quad \psi_{\text{II}} = C\sin kx + D\cos kx \qquad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$$

$$\text{III}: \quad \psi_{\text{III}} = Ee^{Kx} + Fe^{-Kx} \qquad \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = V_0 - E$$

Siden $\cos kx$ er symmetrisk og $\sin kx$ antisymmetrisk når $x \to -x$, er løsningene med like paritet av formen

$$\psi^S = \begin{cases} a e^{Kx} & x \le -L/2 \\ b\cos kx & -L/2 \le x \le L/2 \\ a e^{-Kx} & x \ge L/2 \end{cases}$$

og løsningene med odde paritet

$$\psi^A = \begin{cases} -c e^{Kx} & x \le -L/2 \\ d\sin kx & -L/2 \le x \le L/2 \\ c e^{-Kx} & x \ge L/2 \end{cases}$$

b Grensebetingelser ved $x = \pm L/2$: $\psi(x)$ kontinuerlig

$\psi'(x)$ —— " ——

Ved $x = L/2$:

$$\psi^S(L/2) = b\cos\frac{kL}{2} = ae^{-\frac{KL}{2}}$$

$$d\psi^S(L/2)/dx = -bk\sin\frac{kL}{2} = -aKe^{-\frac{KL}{2}}$$

Divider likningene med hverandre, $\Rightarrow$

$$\tan\frac{kL}{2} = \frac{K}{k} \qquad \text{qed}$$

(samme resultat om betingelsene ved $x=-L/2$ var brukt)

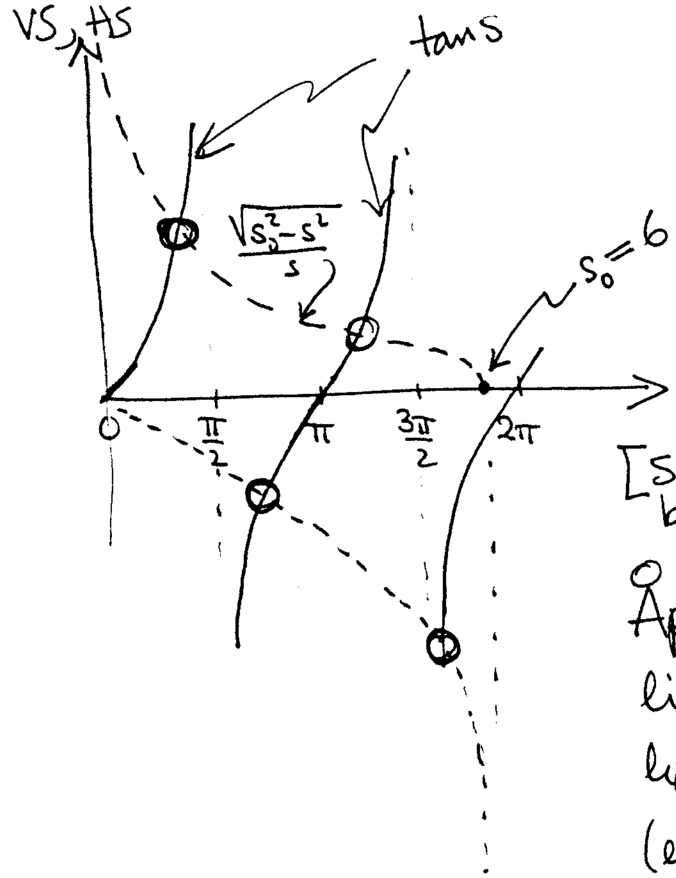
Så var det de odde løsningene

$$\psi^A(L/2) = d\sin\frac{kL}{2} = c\,e^{-\frac{KL}{2}}$$

$$d\psi^A(L/2)/dx = dk\cos\frac{kL}{2} = -cK\,e^{-\frac{KL}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{kL}{2} = -\frac{k}{K}$$

c



$$K^2 = k_0^2 - k^2$$

$$s = kL/2 \qquad s_0 = k_0L/2$$

$$\frac{K}{k} = \frac{\sqrt{s_0^2 - s^2}}{s}$$

[Skissen må ikke tas for bokstavelig, kvantitativt!]

Åpenbart har en to like, og to odde løsninger når $s_0=6$ (eller: når $\frac{3\pi}{2} < s_0 < 2\pi$)

d Kravet om kontinuitet gjelder

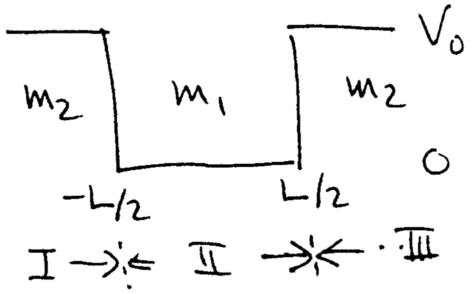
(i) $P=\psi^*\psi$ sannsynlighetstetthet

(ii) $j=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$ sanns.strøm tetthet

Av (i): ψ må være kontinuerlig også i en grenseflate der m springer fra m_1 til m_2

Av (ii): med ψ kontinuerlig, må

$\frac{1}{m}\frac{d\psi}{dx}$ være kontinuerlig i grenseflata



Altså

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\psi^{II}(L/2)}{dx}=\frac{1}{m_2}\frac{d\psi^{III}(L/2)}{dx}$$

$$\psi^{II}(L/2)=\psi^{III}(L/2)$$

I område III: $\psi^{III}(x)=Ae^{-Kx}$; $\frac{\hbar^2K^2}{2m_2}=V_0-E$,

eller $K=\sqrt{\frac{2m_1(V_0-E)}{\hbar^2}}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

Desuten:

$$\frac{d\psi^{II}(L/2)}{dx}=\frac{m_1}{m_2}\frac{d\psi^{III}(L/2)}{dx}=\frac{m_1}{m_2}\cdot(-KA)e^{-\frac{KL}{2}}$$

$$=\underbrace{-\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}_{\downarrow\ 0}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{2m_1(V_0-E)}{\hbar^2}}}_{\text{endelig}}\cdot\underbrace{\psi^{III}(L/2)}_{\text{endelig}}$$

Men når $d\psi^{II}(\pm L/2)dx\to 0$ når $m_2/m_1\to\infty$, må grunntilstandsbølgefunksjonen $(\sim\cos kx)\to$ konst., $k\to 0$ og derved $\boxed{E_{\text{grunntilst.}}\to 0 \text{ når } m_2/m_1\to 0\ !}$

{Kan detaljsjekkes ved å gjennomregne som under pkt. b}