UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof.E.H.Hauge
Tlf. 93651

EKSAMEN I FAG 74226 ATOM– OG KJERNEFYSIKK
Fredag 9.juni 1995
kl.0900–1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent lommekalkulator.

NB. 1.Mange av punktene i oppgavene kan besvares uavhengig av hverandre.
2.Hvert bokstavpunkt i oppgavesettet teller i utgangspunktet likt.

Oppgave I

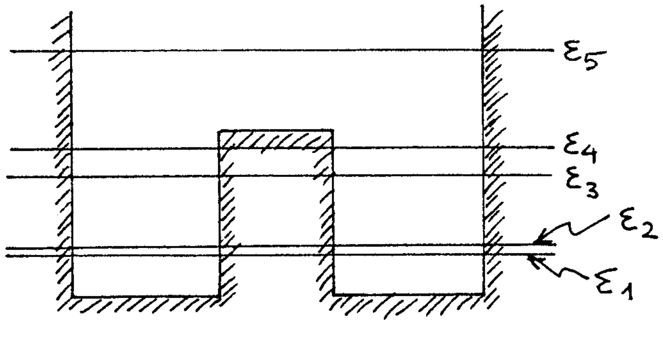
a Bruk vedlagte tabell over massene til forskjellige isotoper, samt enheten $1\ uc^2 = 931.49432$ MeV , til å beregne energien (i MeV) som frigjøres i de to kjernereaksjonene

$$n + {}^{14}N \rightarrow {}^{14}C + {}^{1}H$$
$${}^{14}C \rightarrow {}^{14}N + \beta^-$$

b Elektronene emittert ved β–desintegrasjon av ${}^{14}C$ har en kontinuerlig energifordeling. Hva kan en, ifølge Pauli, slutte av dette, og av at kjernespinnet til ${}^{14}N$ og ${}^{14}C$ er henholdsvis 1 og 0, mens elektronet er en spinn–$\frac{1}{2}$ partikkel?

c Forklar prinsippet for ${}^{14}C$ datering.

Oppgave II



En karikert versjon av et symmetrisk dobbeltbrønn potensial $V(x)$ i én dimensjon, med de 5 laveste energinivåene inntegnet, er vist i figuren. Energiegenfunksjonene $\psi_i(x)$ er løsninger av den tidsuavhengige Schrödingerlikningen

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)]\psi_i(x) = \epsilon_i\psi_i(x)$$

a Skisser (uten å løse Schrödingerlikningen!) formen på de 3 laveste energiegen–funksjonene $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ og $\psi_3(x)$ i dette dobbeltbrønn potensialet.

Gi en kort begrunnelse for at $\epsilon_3 - \epsilon_2 >> \epsilon_2 - \epsilon_1$ her.

b Bestem tidsavhengigheten til sannsynlighetsfordelingen $P(x,t)$ for en partikkel som befinner seg i en lineær superposisjon av tilstandene $\psi_1(x)$ og $\psi_2(x)$.

c Vi plasserer nå to identiske ikke–vekselvirkende spinn–$\frac{1}{2}$ partikler ('ladningsløse elektroner') i dobbeltbrønnen. Grunntilstanden, med energi $E_1 = 2\epsilon_1$ for dette to–partikkel problemet kan skrives

$$\Psi_1(1,2) = \psi_1(1)\psi_1(2)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

De neste (regnet nedenfra i energi) 4 to–partikkel tilstandene $\Psi_i(1,2)$, $i=2,...5$, er degenererte, alle med energien $E_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Skriv ned den tilsvarende formen på disse tilstandene.

d Anta nå at de to partiklene frastøter hverandre, men at den tilhørende vekselvirkningsenergien ikke er større enn at tilstandene under pkt.c fortsatt kan oppfattes som tilnærmete egentilstander. Forklar kort hvilken innvirkning frastøtningen har på degenerasjonen mellom de 4 tilstandene i pkt.c.

Oppgave III

For et en–partikkel system som befinner seg i tilstanden $\Psi(x,t)$ er forventnings–verdien til en vilkårlig operator F gitt som

$$\langle F\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi^* F\Psi$$

Skal F representere en fysisk størrelse, må $\langle F\rangle$ være reell for en vilkårlig tilstand Ψ .

a Definer hva som menes med en hermitsk operator og vis at forventningsverdien til en slik operator alltid er reell.

b Vis hvilke av følgende operatorer som er hermitske

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad p \overset{\text{def}}{=} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad xp$$

c Bruk den tidsavhengige Schrödingerlikningen til å vise at den tidsderiverte av forventningsverdien til en operator F er gitt ved

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle F\rangle = \langle[F,H]\rangle$$

der H er systemets Hamiltonoperator. Bruk dette til å formulere en generell betingelse for at F representerer en bevegelseskonstant.

d Vis ut fra klassisk mekanikk at dreieimpulsen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ er en bevegelseskonstant i et kulesymmetrisk potensial. Formuler og bevis tilsvarende kvantemekaniske utsagn. Karakteriser kort likheter og forskjeller mellom klassisk mekanikk og kvantemekanikk på dette punkt.

e Den sterke vekselvirkningen mellom nøytronet og protonet i deuteronkjernen kan beskrives ved tre ledd på formen $(\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_n)$

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\vec{S}_n \cdot \vec{S}_p) + V_3(r)\,(\vec{S}_n \cdot \vec{r})(\vec{S}_p \cdot \vec{r})$$

der alle $V_i(r)$ har en rekkevidde av størrelsesorden 10^{-15} m.

Bruk betingelsen formulert under pkt.c til å vise at $I_z = L_z + S_z = L_z + S_{nz} + S_{pz}$ er en bevegelseskonstant for deuteronkjernen.

Oppgitt:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Lambda^2}{r^2} \; ; \; \Lambda^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$L^2 = -\hbar^2\Lambda^2 \; ; \; L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \; \text{(sykl.)} \; ; \; [L^2, L_z] = 0$$

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \; \text{(sykl.)} \; ; \; [S^2, S_z] = 0 \, .$$

Information is tabulated for selected isotopes according to atomic number Z, chemical symbol, and mass number A. The atomic mass M refers to the mass of the neutral atom, and values of M are listed in terms of the atomic mass unit u. Other data quoted are the nuclear spin and parity i^p, the isotopic abundance (%), and the radioactive half-life $\tau_{1/2}$. The last two items share the last column in the table, depending on the stable or unstable character of the particular nuclide. Unstable species are indicated by an asterisk next to the value of A. Their half-lives are given in seconds (s), minutes (m), hours (h), days (d), and years (y). Sources of information are *Chart of the Nuclides*, 13th edition (1984), and *Atomic Mass Evaluation*, by A. H. Wapstra and K. Bos (1977).

Z Atom	A	M (u)	i^p	% / $\tau_{1/2}$
0 *n*	1*	1.008665	$\frac{1}{2}^+$	10.5 m
1 H	1	1.007825	$\frac{1}{2}^+$	99.985
	2	2.014102	1^+	0.015
	3*	3.016049	$\frac{1}{2}^+$	12.3 y
2 He	3	3.016029	$\frac{1}{2}^+$	0.00014
	4	4.002603	0^+	99.99986
3 Li	6	6.015121	1^+	7.5
	7	7.016003	$\frac{3}{2}^-$	92.5
4 Be	7*	7.016930	$\frac{3}{2}^-$	53.28 d
	9	9.012182	$\frac{3}{2}^-$	100
	10*	10.013535	0^+	1.6×10^6 y
5 B	10	10.012936	3^+	19.9
	11	11.009305	$\frac{3}{2}^-$	80.1
	12*	12.014353	1^+	20.2 ms
6 C	12	12.000000	0^+	98.90
	13	13.003355	$\frac{1}{2}^-$	1.10
	14*	14.003242	0^+	5730 y
7 N	14	14.003074	1^+	99.63
	15	15.000109	$\frac{1}{2}^-$	0.37
	16*	16.006099	2^-	7.13 s