

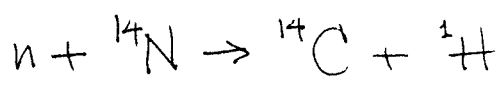
Atom- og kjernefysikk
Eksamen 9.6.95

Løsningsforslag

Oppgave I

a Massene i vedlagte tabell refererer seg til neutrale atomer slik det klart fremgår av "bruksanvisningen". Det vil si at massen til ^1H (f.eks) inneholder elektronmassen og bindingsenergien $\approx 13.6\text{eV}$ til et H-atom i grunntilstand. (Massen til "n" er selvsagt neutron-massen!)

Proessen



gir de energiregnskapet:

n:	1.008665	${}^{14}\text{C}$:	14.003242
${}^{14}\text{N}$:	14.003074	${}^1\text{H}$:	1.007825
	<u>15.011739</u>		<u>15.011067</u>

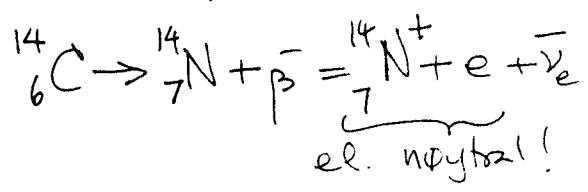
$$- 15.011067$$

$$0.000672 \text{ u} \times 931.49432 \text{ MeV/u} = \underline{\underline{0.626 \text{ MeV}}}$$

3 signifikante siffer

På denne skalaen blir bindingsenergien 13.6 eV i H-atomet fullstendig neglisjerbar. Med usikkerhet $\sim 10^{-4} \text{ MeV} = 100 \text{ eV}$ kan den glemmes!

Tilsvarende:



${}^{14}\text{C}$:	14.003242	elektronmassen er medregnet her!
${}^{14}\text{N}$:	14.003074	
	<u>0.000168 u</u>	
	<u><u>0.156 MeV</u></u>	

b Med én emittert partikkel kan energifordelingen mellom denne og morkjernen bestemmes presis av energi- og impulsbevarelse (jfr α -desintegrasjon).
 Pauli: Energien må (dogme!) være bevart og derfor må det være en tredje partikkel med i bildet ved β -integrasjon. (Her: ~~Elektron~~ "Elektronantinytrinoet" ($\bar{\nu}_e$))

Paulis formodning blir styrket av at kjernespinndifferansen mellom ^{14}C og ^{14}N er $1-0=1$, mens elektronspinn er $1/2$. Selv en hvilken som helst bandedreimpuls i $^{14}\text{N} + e^-$ systemet kan ikke redde dreimpuls-bevartelse! ($\vec{L}=0$ i ^{14}C i grunn-tilstand, formodentlig. I alle fall: Helt feil!)
 Kort sagt: Vi trenger et nøytrino, med halvtallig spinn!

c Tilnærmet likevekt i atmosfæren mellom de to reaksjonene under pkt. a. (Noenlunde konstant tilførsel av nøytroner fra kosmos.)
 Når biologisk materiale (trær/dyr/mennesker) dør, tas det ut av denne likevekt, og vi får bare den siste prosessen, $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + \beta^-$, med halveringstid 5730 år. Siden den relative konsentrasjonen $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ faller av eksponentielt med tiden, kan alderen til dødt biologisk materiale bestemmes ved kvantitativ analyse av $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$.

(I praksis: Kalibreringskurve pga variasjoner i "likevekten" pga vulkanutbrudd etc.

Mennedelig aktivitet de siste 100 år vil også forstyrre dateringer i år 3995 etter Kristus!)

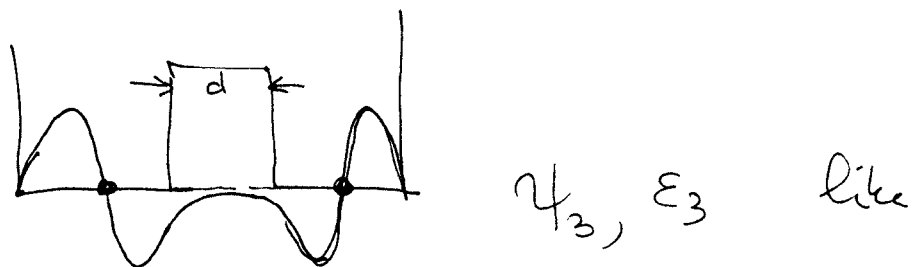
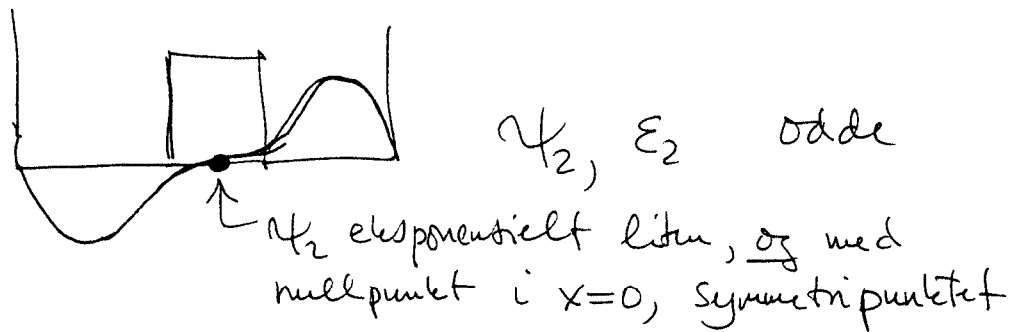
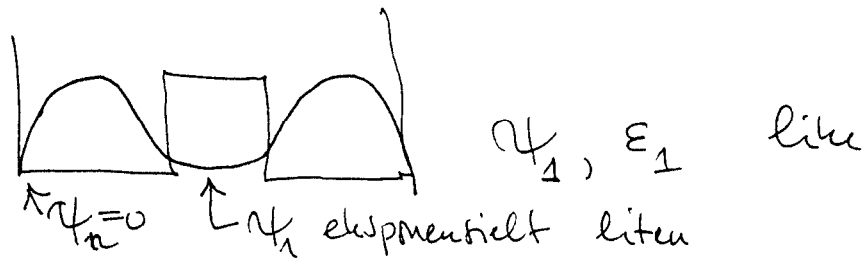
Oppgave II

a Symmetrisk potensial, $V(-x) = V(x)$, \Rightarrow alle egenfunksjoner har bestemt paritet.

Dessuten: Grunntilstanden $\psi_1(x)$ har 0 nullpunkt
 $\psi_2(x)$ " 1 "
 $\psi_3(x)$ " 2 "
 etc.

Og, når $E \ll V_0$ (barrierehøyden) vil to og to egenfunksjoner nesten være degenererte (aldri fullstendig degenerasjon i 1D dimensjon!), av samme til at ψ likner svært på partikkel-i-boks tilstander i hver enkelt boks.

\Rightarrow



$\epsilon_2 - \epsilon_1 \approx e^{-2kd}$ etc., mens $\epsilon_3 - \epsilon_2 \approx$ avst. mellom grunntilst. og 1. eksit. tilst i 1D.

$$\Rightarrow \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \gg \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

b

$$\Psi(x,t) = c_1 \psi_1(x) e^{-\frac{i\varepsilon_1 t}{\hbar}} + c_2 \psi_2(x) e^{-\frac{i\varepsilon_2 t}{\hbar}}$$

$$P(x,t) = \Psi^* \Psi = |c_1|^2 \psi_1^2(x) + |c_2|^2 \psi_2^2(x) +$$

$$+ \psi_1(x) \psi_2(x) \left[\underbrace{c_1^* c_2}_{K e^{i\gamma}} e^{\frac{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar}} + \underbrace{c_1 c_2^*}_{K e^{-i\gamma}} e^{-\frac{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar}} \right]$$

$$= (\text{wash. av } t) + 2K \psi_1(x) \psi_2(x) \cos \left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar} + \gamma \right]$$

$$\dots \dots \dots \cos[\omega t + \gamma]$$

med $\omega = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar}$.

c. To-elektron grunntilstanden har begge elektronene i ψ_1

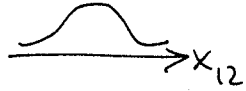
$$\bar{\Psi}_1(1,2) = \underbrace{\psi_1(1)\psi_1(2)}_{\text{sym.}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}_{\text{antisym.}} \quad E_1 = 2\varepsilon_1$$

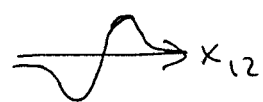
antisym. (elektronene er fermioner!)

Neste energi-nivå svarer til at ett elektron er i ψ_1 , og ett i ψ_2 . Fire muligheter

$$E_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Psi}_{2,3,4}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)) \left\{ \begin{array}{l} \uparrow\uparrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ \downarrow\downarrow \\ \text{sym.} \end{array} \right. \\ \bar{\Psi}_5(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(1)\psi_2(2) + \psi_2(1)\psi_1(2)) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \end{array} \right.$$

antisym. sym. antisym.

d $\bar{\Psi}_5$ er gjennomsnittsstanden mindre mellom de to elektronene  (sym i rommet)

$\bar{\Psi}_{2,3,4}$ er den store  (antisym i rommet)

Med frstetning mellom partiklene vil $\bar{\Psi}_5$ få høyere egenenergi enn $\bar{\Psi}_{2,3,4}$ (når begge forutsettes fortsatt i varre (tilnærmete) egentilstander).

Oppgave III

a Når vi for enkelthets skyld holder oss i 1 romdimensjon, er hermitisitet til en operatør \bar{F} definert ved at

$$\int dx \psi^* \bar{F} \phi = \int dx (\bar{F}^* \psi^*) \phi \quad \forall \psi, \phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \bar{F} \rangle^* &= \left(\int dx \psi^* \bar{F} \psi \right)^* = \int dx \psi \bar{F}^* \psi^* \\ &= \int dx (\bar{F}^* \psi^*) \psi \stackrel{\uparrow \text{hermitisitet}}{=} \int dx \psi^* \bar{F} \psi = \langle \bar{F} \rangle \end{aligned}$$

Når $\langle \bar{F} \rangle^* = \langle \bar{F} \rangle$ vil $\langle \bar{F} \rangle$ være reell. OK!

b
$$\int dx \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \phi = \underbrace{\left[\psi^* \phi \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ for normerbare funksjoner}} - \int dx \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \phi$$

Minustegnet spiler hermitisitet $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \neq \text{herm!}$

$$\begin{aligned} \int dx \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi &= 0 - \int dx \left(\frac{\hbar}{+i} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) \phi \\ &= \int dx \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^* \psi^* \right] \phi \Rightarrow P_{op} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ &\hspace{15em} \text{hermitisk!} \end{aligned}$$

$$\int dx \psi^* x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi = - \int dx \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x \psi^* \right) \phi$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int dx \psi^* \phi + \int dx \left[x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right] \phi$$

$\uparrow \neq 0$ generelt (kan være 0 i mange spesielle tilfelle, men-)

$\Rightarrow xp$ er ikke hermitisk!

c) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$ ↑ antatt tidsuavhengig operator

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int dx \Psi^* F \Psi$$

$$= \int dx \left(i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) F \Psi + \int dx \Psi^* F i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$= \int dx \left(-H^* \Psi^* \right) F \Psi + \int dx \Psi^* F H \Psi$$

\downarrow hermitisitet

$$= \int dx \Psi^* \{ -HF + FH \} \Psi$$

$$= \langle [F, H] \rangle \quad \forall \Psi!$$

$$\Rightarrow \text{Skal } \langle \dot{F} \rangle = 0 \quad \text{med } \underbrace{[F, H] = 0}_{\text{Kraut til bevægelseskonst!}}$$

d Klassisk:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{1}{m} \underbrace{\vec{p} \times \vec{p}}_{\equiv 0} - \vec{r} \times (\nabla V)$$

Med $V(\vec{r}) = V(r)$ er $\nabla V = \frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{r} \times \vec{r} \equiv 0$$

QM:

Jfr. oppgitt form på ∇^2

$$[H, L^2] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V, L^2 \right] = [V, L^2] = 0$$

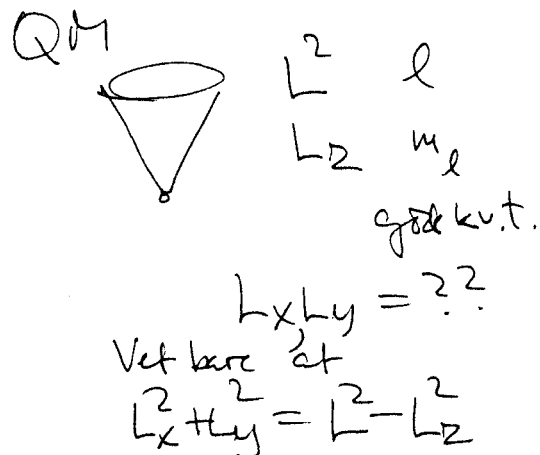
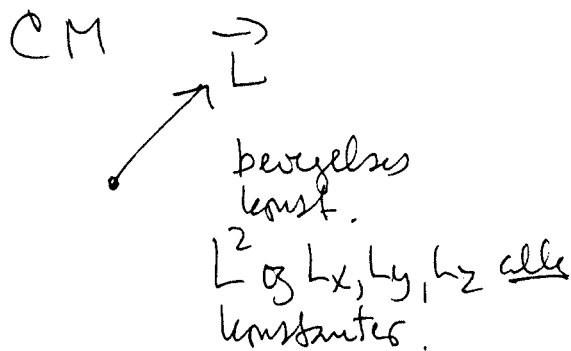
↑ Operatør i vinkel rommet \mathcal{D}_l eller når $V(\vec{r}) = V(r)$

$$[H, L_z] = [L_x, L_z] = [V, L_z] = 0 \quad (-"-)$$

$\Rightarrow l$ & m_l er "gode kvantetall" når V er kulesym!

Men $[L_z, L_x] \neq 0$ $[L_z, L_y] \neq 0$.

I QM, i motsetning til CM, kan bare en komponent av \vec{L} spesifiseres i tillegg til lengden



$$\underline{e} \quad V = \underbrace{V_1(r)}_{\text{kulesym}} + \underbrace{V_2(r)}_{\uparrow} \underbrace{\vec{S}_n \cdot \vec{S}_p}_{\uparrow} + \underbrace{V_3(r)}_{\uparrow} (\vec{S}_n \cdot \vec{r}) (\vec{S}_p \cdot \vec{r})$$

L_z kommuterer med ledd 1 & 2, men ikke med 3, pga at $[L_z, \vec{r}] \neq 0$

S_{nz} komm. med ledd 1, men ikke med 2 & 3 pga at $[S_{nz}, \vec{S}] \neq 0$

Tilsvarende for S_{pz} .

Ser spørje ut! Men, la oss først vise at $S_{nz} + S_{pz}$ kommuterer med ledd 2 (av symmetri-grunner må da alle komponentene til $\vec{S}_n + \vec{S}_p$ kommutere med ledd 2).

$$\begin{aligned}
 & [S_{nz} + S_{pz}, S_{nx} S_{px} + S_{ny} S_{py} + S_{nz} S_{pz}] \\
 &= [S_{nz}, S_{nx}] S_{px} + [S_{nz}, S_{ny}] S_{py} \\
 & \quad + S_{nx} [S_{pz}, S_{px}] + S_{ny} [S_{pz}, S_{py}] \\
 &= i\hbar \{ S_{ny} S_{px} - S_{nx} S_{py} + S_{nx} S_{py} - S_{ny} S_{px} \} = 0
 \end{aligned}$$

Artså: $[\vec{I}, \vec{S}_n \cdot \vec{S}_p] = [\vec{S}, \vec{S}_n \cdot \vec{S}_p] = [\vec{S}_n + \vec{S}_p, \vec{S}_n \cdot \vec{S}_p] = 0$

Problemet er 3. ledd! Først, komm. med \vec{S} :

$$\begin{aligned}
 & [S_{nz} + S_{pz}, (S_{nx}x + S_{ny}y)(S_{px}x + S_{py}y)] \\
 &= i\hbar \{ (S_{ny}x - S_{nx}y)(S_{px}x + S_{py}y) \\
 & \quad + (S_{nx}x + S_{ny}y)(S_{py}x - S_{px}y) \} \\
 &= i\hbar \{ x^2(S_{ny}S_{px} + S_{ny}S_{py}) - y^2(S_{nx}S_{py} + S_{ny}S_{px}) \\
 & \quad + xy(S_{ny}S_{py} - S_{nx}S_{px} - S_{nx}S_{px} + S_{ny}S_{py}) \} \\
 & \neq 0!
 \end{aligned}$$

Deretter

$$\begin{aligned}
 & [L_z, (S_{nx}x + S_{ny}y)(S_{px}x + S_{py}y)] \\
 &= S_{nx}S_{px} [L_z, x^2] + S_{ny}S_{py} [L_z, y^2] \\
 & \quad + (S_{nx}S_{py} + S_{ny}S_{px}) [L_z, xy]
 \end{aligned}$$

Vi trenger derfor $[L_z, x^2]$, $[L_z, y^2]$ og $[L_z, xy]$. 9

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$[L_z, x] = -i\hbar(0 - y) = i\hbar y \quad ; \quad [L_z, y] = -i\hbar(x - 0) = -i\hbar x$$

$$[L_z, x^2] = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \right] = -i\hbar (-y \cdot 2x) = 2i\hbar xy$$

$$[L_z, y^2] = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \right] = -i\hbar (x \cdot 2y) = -2i\hbar xy$$

$$[L_z, xy] = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, xy \right] = -i\hbar (x^2 - y^2)$$

Dermed:

$$[L_z, (\vec{S}_n \cdot \vec{r})(\vec{S}_p \cdot \vec{r})] = i\hbar \left\{ S_{nx} S_{px} \cdot 2xy + S_{ny} S_{py} \cdot (-2xy) \right. \\ \left. + (S_{nx} S_{py} + S_{ny} S_{px}) (-x^2 + y^2) \right\}$$

Legges dette sammen med $[S_z, (\vec{S}_n \cdot \vec{r})(\vec{S}_p \cdot \vec{r})]$ blir summen precis 0! (Puh!!)

Altså \vec{I} kommuterer med $V(r)$ altså!!, dvs. $I^2 \neq I_z$ (f.eks.) kommuterer og de tilsvarende konstantene er gode!

{ Den meget dypsindige tenker ville kunne innse dette direkte ved at V er invariant overfor en sambtidig rotasjon av $\vec{r} \neq \vec{S}_n \neq \vec{S}_p$! ~~Men~~ Men denne typen visdom kan kun forventes i innbrotte på et adskillig senere tidspunkt enn i semester 4! }