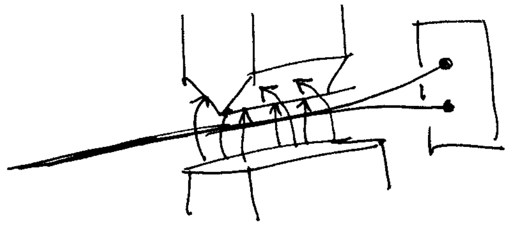
Atom- og kjernefysikk
Kontinuasjonseksamen 18.8.95

Løsningsforslag

Oppgave 1

Stern-Gerlach eksperimentet



En stråle nøytrale atomer (ingen forstyrrende Lorentz-kraft) sendes gjennom et inhomogent magnetfelt. Splittingen av strålen observeres.

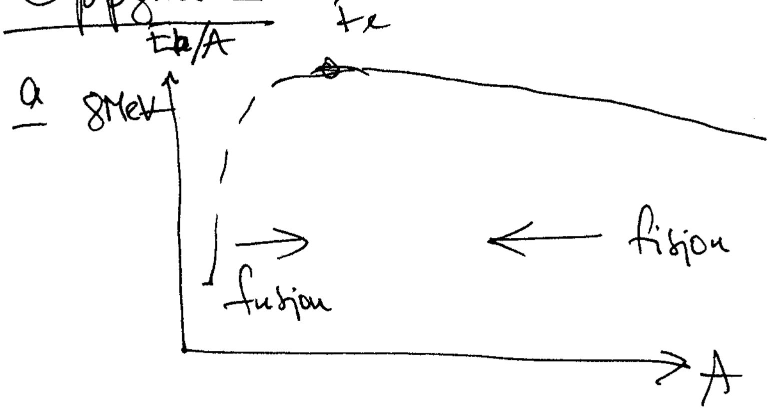
Med magnetisk moment $\vec{\mu}$ er energibidraget fra koplingen til magnetfeltet $V_M = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$.
Kraft (nettokraft!):

$$\vec{F} = +\nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) \Rightarrow F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (\text{når } B_z \text{ dominerer})$$

Med et inhomogent magnetfelt vil derfor strålen spaltes opp etter antall tillatte verdier til μ_z. (Homogent $\vec{B}$-felt gir bare dreiemoment, ingen nettokraft!) Dersom μ_z var forårsaket av banedreieimpulsens magnetiske moment, skulle atomer med $L^2 \to \hbar^2 l(l+1)$ gi $2l+1$ delstråler. l = heltall $\Rightarrow$ $2l+1$ odde tall. Hydrogen: To stråler. $\Rightarrow$ Ny frihetsgrad: elektronets spinn $2s+1 = 2$ stråler når $s=\frac{1}{2}$ (og $l=0$ i grunntilstanden).

Oppgave 2

a

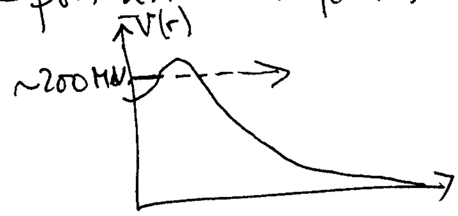


Bindingsenergi pr. nukleon, grovt skissert.

Fisjon: Tunge kjerner faller fra hverandre i omtrent like store deler, under utsendelse av overskudds-nøytroner (større nøytron-overskudd i tunge kjerner). Energi frigjøres.

Fusjon Små kjerner (H, D, ^{3}H) smelter sammen til tyngre (^{4}He) under frigjøring av (mye!) energi pr. nukleon.

b Spontan fisjon: Fisjon pga iboende ustabilitet
Analogt α-desintegrasjon
Høyst forskjellige levetider



Indusert fisjon: Fisjon fremprovosert ved ytre påvirkning, vanligvis bombardement med nøytroner. Eksempler

$$^{235}U + n \longrightarrow {}^{236}U^* \longrightarrow X + Y + 2.4n$$

Prosessen har stort innfangningstverrsnitt for termiske nøytroner, og den frigjorte energi ved nøytroninnfangning er stor nok til at $^{236}U^*$ spontant fisjonerer. Mange mulige fisjonsprodukter, i gjennomsnitt 2.4 nøytroner pr. reaksjon.

$$^{238}U + n \longrightarrow {}^{239}U^* \longrightarrow X' + Y' + \ldots$$

Her er ikke energien, med termiske nøytroner, tilstrekkelig til at $^{239}U^*$ fisjonerer spontant. Det må 0.6 MeV til ut over dette, altså hurtige nøytroner. Men for slike hurtige nøytroner er innfangningstverrsnittet bare 1/580 av termiske nøytroner. Denne prosessen er derfor mye vanskeligere å få til å gå.

c "Anriket" uran vil si at % av ^{235}U i naturlig uran (~0.7%) er økt ~~fra~~ ca. 3%. Det er tilstrekkelig til å få til en kjedereaksjon. Ett av de 2.4 nøytronene frigjort ved fisjon av ^{235}U "finner" et nytt ^{235}U-atom, som fisjonerer etc. For å få dette til må de utsendte nøytronene bremses ned til termiske hastigheter (stort innfangningstverrsnitt). Til dette brukes en moderator (lette kjerner): H_2O (vanligst), D_2O eller grafitt (Tsjernobyl). For at ikke multiplikasjons-faktoren k i kjedereaksjonen skal overstige 1, reguleres system med bor (B) i moderator-vannet, og, for finregulering, Cd-staver som absorberer nøytroner. Regulering er praktisk mulig fordi 0,65% av de utsendte nøytrone først dukker opp etter en halveringstid på 12.7 sekunder (de aller fleste fisjonsprodukter gir nøytron-generering i løpet av ~10^{-12} s!)

Etter ca. et år er uranskvene så utarmet på ^{235}U at syklusen må avsluttes og ny stav monteres.

Frigjort energi ender som termisk energi, som så brukes, med konvensjonell dampturbin-teknologi, til å generere elkraft. Total virkningsgrad typisk 30%. (Spillvarmen kan evt. utnyttes til husoppvarming etc.)
Etc etc etc.

Oppgave 3

a

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$$

$$[H_0, L^2] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Lambda^2}{r^2}\right) + V(r), -\hbar^2\Lambda^2\right]$$

Λ^2 ren vinkeloperator, som kommuterer med rent r-avhengige størrelser $\Lambda^2 V(r) = V(r)\Lambda^2$.
Dessuten kommuterer enhver operator med seg selv! Altså $[H_0, L^2] = 0$

$[H_0, L_z] = 0$ siden $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ også er en ren vinkeloperator

$[H_0, S^2] = 0$ og $[H_0, S_z] = 0$ siden spinn-operatorene bare opererer i spinn-rommet, ikke i $\vec{r}$-rommet.

$\Longrightarrow$ l, m_l, s, m_s "gode kvantetall" her.

b $J^2 = L^2 + 2\vec{S}\cdot\vec{L} + S^2$; $J_z = L_z + S_z$

Siden $[H_0, L_z] = 0$ og $[H_0, S_z] = 0$ må $[H_0, J_z] = 0$

Tilsvarende:

$$[H_0, J^2] = 2[H_0, \vec{S}\cdot\vec{L}]$$

Siden $\vec{S}$ lever i et annet rom enn H_0 har vi

$$[H_0, J^2] = 2\vec{S}\cdot[H_0, \vec{L}] = 2\big(S_x[H_0, S_x] + S_y[H_0, L_y] + S_z[H_0, L_z]\big)$$

Vi vet at $[H_0, L_z] = 0$. Men når H_0 er kulesymmetrisk må resultatet bli det samme for L_x og L_y! Altså

$$[H_0, J^2] = 2\vec{S}\cdot[H_0, \vec{L}] = 0 .$$

Også j og m_j er gode kvantetall her.

c Når $H = H_0 + H_{SL} = H_0 + \gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}$ vil vi måtte sjekke $[H_{SL}, \cdots]$ siden vi alt har funnet (i a og b) at H_0 kommuterer med $L^2, L_z, S^2, S_z, J^2, J_z$.

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, L^2] = \vec{S}\cdot[\gamma(r)\vec{L}, L^2] \quad \text{(som før!)}$$

$$= \vec{S}\gamma(r)[\vec{L}, L^2] \quad \text{siden } \gamma(r) \text{ er kulesym.}$$

$$= 0 \quad \text{siden } [L^2, L_z] = 0, \quad [L^2, L_x] = 0 = [L^2, L_y]$$

av symmetrigrunner.

Altså: l et godt kv.tall.

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, S^2] = \gamma(r)\vec{L}\cdot[\vec{S}, S^2] = 0$$

$\Rightarrow$ s er et godt kvantetall

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, J^2] = 2\gamma(r)[\vec{S}\cdot\vec{L}, \vec{S}\cdot\vec{L}] = 0$$

$\Rightarrow$ j godt kv.t.

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, L_z] = \gamma(r)\vec{S}\cdot[\vec{L}, L_z] \neq 0$$

siden $[L_x, L_z] \neq 0$ og $[L_y, L_z] \neq 0$

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, S_z] = \gamma(r)\vec{L}\cdot[\vec{S}, S_z] \neq 0$$

tilsvarende

$$[\gamma(r)\vec{S}\cdot\vec{L}, S_z + L_z] = \gamma(r)\{L_x[S_x, S_z] + L_y[S_y, S_z] + S_x[L_x, L_z] + S_y[L_y, L_z]\}$$

$$= i\hbar\gamma(r)\{-L_x S_y + L_y S_x - S_x L_y + S_y L_x\}$$

$$= i\hbar\gamma(r)\{\underbrace{[S_y, L_x]}_{=0} + \underbrace{[L_y, S_x]}_{=0}\} = 0$$

Altså: Gode kv.t. med spinn-bane kopling:

l, s, j, m_j

Ikke lenger gode:

m_s, m_l

Oppgave 4

a Tidsavhengig Schrödingerlikning:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = H \Psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi(\vec{r},t)$$

Separasjonsantakelse: $\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}) f(t)$

$$i\hbar \psi \dot{f} = f H\psi \quad \Big| \frac{1}{\psi f}$$

$$\underbrace{i\hbar \frac{\dot{f}}{f}}_{\text{uavh. } \vec{r}} = \underbrace{\frac{H\psi}{\psi}}_{\text{uavh. } t} = E$$

altså: Energien

$$\hookrightarrow f = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = e^{-i\omega t} \qquad E = \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{H\psi = E\psi} \quad \text{tidsuavh. Sch.l.}$$

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{med separasjon}}}{=} |\psi(\vec{r})|^2 |f(t)|^2 = \underbrace{|\psi(\vec{r})|^2}_{\text{tidsuavh!}}$$

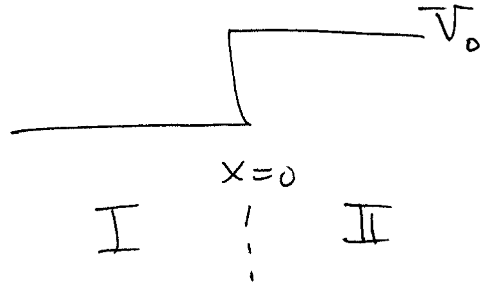
$\Psi(\vec{r},t)$ separerer $\Longleftrightarrow$ stasjonær tilst.

Grensebet: $\psi(\vec{r})$ kontinuerlig

$\nabla\psi(\vec{r})$ — " — (unntatt der V springer til ∞)

(ψ vanligvis <u>normerbar</u> $\int d^3r\, |\psi|^2 = 1$,
<u>unntatt</u> i spredningstilstander, med
planbølger inn & ut)

b



i I: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi = \frac{\hbar^2}{2m}k^2\psi \Rightarrow \psi_I = e^{ikx} + re^{-ikx}$

i II: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0\psi = E\psi \Rightarrow \psi'' = -q^2\psi \Rightarrow \psi_{II} = te^{iqx}$

Vi kan ikke ha med e^{-iqx} i område II simpelthen fordi ingen partikler kommer inn fra høyre, pr problemstilling!

$x=0$:

ψ kont: $1+r=t$; ψ' kont: $ik(1-r) = iqt$

$$\Rightarrow \frac{1+r}{(1-r)k} = \frac{1}{q} \Rightarrow q + qr = k - kr$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{k-q}{k+q}} \qquad \boxed{t = \frac{2k}{k+q}}$$

{Merk at partikkelbevarelse gir strøm ut = strøm inn

$$\Rightarrow 1\cdot k = |r|^2 k + |t|^2 \cdot q = \left[\left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 + \frac{4kq}{(k+q)^2}\right]k \equiv k\}$$

c Refleksjonssannsynlighet

$$R = |r|^2 = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 \underset{q/k=9/10}{=} \left(\frac{1}{19}\right)^2 = \frac{1}{361}$$

Ikke i tråd med klassisk mekanikk, som gir $R_{CM} = 0$. (Men når $V_0 \ll E$ vil $R \to R_{CM}$.)

d Heisenberg

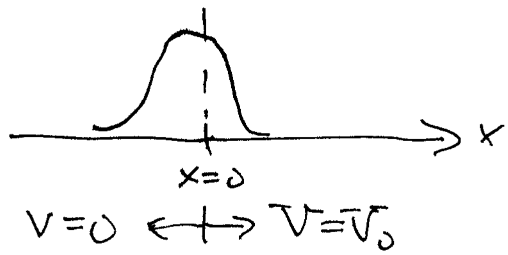
$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar \quad ; \quad p_x = \hbar k_x$$

Altså:

$$\Delta x_k \Delta k \gtrsim 1 \qquad \Delta x_q \Delta q \gtrsim 1$$

Dette er essensielt fundamentalegenskaper i Fourier-analyse: En bølgepakke trenger større spektrum av bølgelengder, jo mer presist den er konsentrert i rommet. (Merk at tidsutviklingen iflg. Schrödingerlikningen får Δx langsomt til å vokse, selv med fiksert Δk.)

e



q-pakken ($x>0$) fødes i løpet av samme tidsrom τ som k-pakken ($x<0$) dør (vi neglisjerer refleksjon)

Altså:

$$\tau = \frac{\Delta x_k}{v_{k_0}} = \frac{\Delta x_q}{v_{q_0}} \quad (\text{når } \Delta k \ll k_0 \text{ og } \Delta q \ll q_0)$$

Dermed

$$\Delta x_q = \frac{v_{q_0}}{v_{k_0}} \Delta x_k = \frac{q_0}{k_0} \Delta x_k < \Delta x_k$$

Spredningen i energien til bølgepakken er den samme før og etter potensialtrinnet (energibevarelse)

$$\Delta E_k = \Delta K_k = \Delta E_q = \Delta(K_q + \underbrace{V}_{\text{den samme for alle Fourier komp!}}) = \Delta K_q$$

Altså

$$\Delta K_k = \frac{\hbar^2 k_0 \Delta k}{m} = \frac{\hbar^2 q_0 \Delta q}{m} = \Delta K_q$$

Slik at

$$\Delta q = \frac{k_0}{q_0} \Delta k$$

Heisenbergproduktet er dermed invariant:

$$\Delta x_k \Delta k = \Delta x_q \Delta q$$

i vår 0'te tilnærmelse, der refleksjon er neglisjert, og også tidsutviklingen av $\Delta x_k(t)$ og $\Delta x_q(t)$ (den er uvesentlig her når $\Delta k \ll k_0$ og $\Delta q \ll q_0$!)