74305 TERMISK FYSIKK
10.6.1989

LØSNINGSSKISSE:

Oppgave 1 a) $W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p\,dV = mRT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = \underline{\underline{mRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}}}$

$W_{bc} = W_{da} = \underline{\underline{0}}$; $W_{cd} = \underline{\underline{mRT_1 \ln \frac{V_a}{V_b}}}$

Da U = konstant langs isoterm for ideell gass er

$Q_{ab} = W_{ab} = \underline{\underline{mRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}}}$; $Q_{cd} = W_{cd} = \underline{\underline{mR \ln \frac{V_b}{V_a}}}$. Dessuten:

$Q_{bc} = \underline{\underline{m C_{mV} (T_1 - T_2)}}$ $Q_{da} = \underline{\underline{m C_{mV} (T_2 - T_1)}}$

b) $U_a - U_c = U_b - U_c = -Q_{bc} = \underline{\underline{m C_{mV} (T_2 - T_1)}}$

c) Translasjon- og rotasjon- frihetsgradene bidrar til $C_{mV} = \frac{5}{2} R$.

Da $C_{mp} - C_{mV} = R$ for ideell gass blir $\gamma = \frac{7/2}{5/2} = \underline{\underline{1,4}}$

d) Arbeidet / syklus er $W = W_{ab} + W_{bc} = mR(T_2 - T_1) \ln (V_b/V_a)$

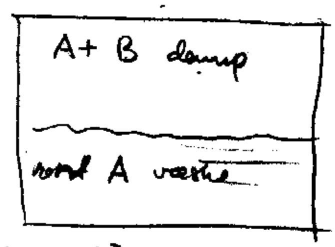
Virkningsgraden etter den angitte beregningsmåte blir

$$\eta = \frac{W}{Q_{ab} + Q_{da}} = \frac{mR(T_2 - T_1) \ln V_b/V_a}{m C_{mV} (T_2 - T_1) + mRT_2 \ln V_b/V_a}$$

$$= \frac{1}{\frac{C_{mV}}{R} \frac{1}{\ln V_b/V_a} + \frac{T_2}{T_2 - T_1}} = \frac{1}{\frac{2,5}{\ln 4} + 2} = \underline{\underline{0,26}}$$

Oppgave 2

a) A-molekyler kan vandre til det kjemiske potensial for A er likt i begge faser:



$$\mu_A^{ov}(p,T_0) = \mu_A^{g}(p,T_0,x_A)$$

Dette (pluss at p & T er konstant over systemet) er likevekts betingelsen. For ideell blanding, og med $x_A = 1-x_B$ blir dette

$$\underline{\underline{\mu_A^{ov}(p,T_0) = \mu_A^{og}(p,T_0) + kT_0 \ln(1-x_B)}}$$

$^{o} \equiv$ rent stoff ; $^{v} \equiv$ væske ; $^{g} \equiv$ gass.

b) Med $x_B = 0$ var likevekten ved $p = p_0$:

$$\mu_A^{ov}(p_0,T_0) = \mu_A^{og}(p_0,T_0). \qquad (*)$$

Betingelsen under a) er, med $p = p_0 + \Delta p$:

$$\mu_A^{ov}(p_0+\Delta p, T_0) = \mu_A^{og}(p_0+\Delta p, T_0) + kT_0 \ln(1-x_B)$$

For x_B liten er Δp liten. Utvikling til første orden i x_B og Δp

$$\underline{\mu_A^{ov}(p_0,T_0)} + \Delta p \left(\frac{\partial \mu_A^{ov}}{\partial p}\right)_{T_0} = \underline{\mu_A^{og}(p_0,T_0)} + \Delta p \left(\frac{\partial \mu_A^{og}}{\partial p}\right)_{T_0} - kT_0 x_B$$

P.g.a. (*) kansellerer hovedleddene :

$$\Delta p = \frac{kT_0 x_B}{\left(\frac{\partial \mu_A^{og}}{\partial p}\right)_{T_0} - \left(\frac{\partial \mu_A^{ov}}{\partial p}\right)_{T_0}}$$

For rent stoff er $\mu = \frac{G}{N}$, og $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{N} V = v$, volum/partikkel. Vi har brukt at $(\partial G/\partial p)_T = V$ som følger av $dG = V dp - S dT$ for én komp. system.

Altså :

$$\underline{\underline{\Delta p = \frac{kT_0}{v_A^{g} - v_A^{v}} x_B}}$$

c) Med $v_A^v \ll v_A^g = \frac{kT_0}{p_0}$ fås $\frac{\Delta p}{p_0} = x_B$

Likevekten innstiller seg ved et høyere trykk.

Oppgave 3

Sannsynligheten for å finne systemet i n'te energinivå E_n, med degenerasjonsgrad g_n, er

$$p_m = \frac{1}{Z} g_m e^{-E_m/kT},$$

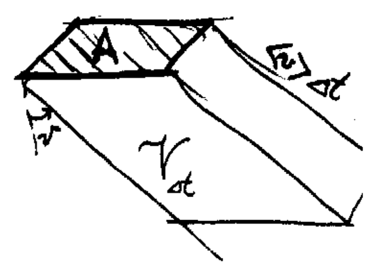
så

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-(E_1-E_0)/kT}$$

Med $g_1 = 3$, $g_0 = 1$, $E_1 - E_0 = 19.82\,eV$, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ og $T = 10^4\,K$, blir

$$\frac{p_1}{p_0} = 3\, e^{-\frac{19.82 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^4}} = 3.1 \cdot 10^{-10}$$

Oppgave 4



a) Se på partikler med retning i romvinkelen $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ omkring (ϑ, φ). Dersom farten er $\langle v\rangle$ vil alle partikler innenfor det skisserte volum $V_{\Delta t}$ treffe A i løpet av tida Δt. Med n partikler pr. volumenhet vil det være $n V_{\Delta t}$ partikler i $V_{\Delta t}$ og brøkdelen $n V_{\Delta t} \frac{d\Omega}{4\pi}$ vil ha hastighetsretning i $d\Omega$. Volumet er $V_{\Delta t} = \langle v\rangle \Delta t\, A \cos\vartheta$. Antall støt er derfor

$$n \langle v\rangle \Delta t\, A \cos\vartheta\, \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{4\pi}$$

Regner med middelfarten $\langle v \rangle$, som er ok for å beregne det midlere antall støt.

Når vi summerer alle retninger fra den ene siden av flaten blir dette antallet

$$n \langle v \rangle \Delta t\, A \,\frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}_{\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{n\langle v \rangle}{4} \Delta t\, A$$

Pr. tidsenhet og flateenhet fås støttallet

$$\underline{\underline{\frac{n\langle v \rangle}{4}}}$$

b) $$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = (m/2\pi kT)^{\frac{3}{2}}\, 4\pi \int_0^\infty dv\, v^3 e^{-mv^2/2kT}$$

Med $mv^2/2kT = x$, $dx = dv\, mv/kT$, fås

$$\langle v \rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \cdot \frac{2kT}{m} \frac{kT}{m} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}_{1} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}}}$$

c) Fotoner har fart c, så vi benytter resultatet i a) med $\langle v \rangle = c$. La $n_\nu\, d\nu$ være det midlere antall fotoner pr. volumenhet med frekvens i $(\nu, \nu + d\nu)$, og $u_\nu\, d\nu = h\nu\, n_\nu\, d\nu$ bidraget fra disse til den indre energi pr. volumenhet.

Antallet av disse som slipper ut gjennom A pr. tidsenhet er

$$\frac{n_\nu\, d\nu}{4} \cdot c \cdot A,$$

og energien som slipper ut pr. tidsenhet er

$$\frac{n_\nu h\nu\, d\nu}{4} c A = \frac{u_\nu\, d\nu}{4} c A$$

Integrert over alle frekvenser, med $u = \int_0^\infty u_\nu\, d\nu$, fås utstrålt energi pr. tidsenhet lik

$$\underline{\underline{\frac{u}{4} \cdot c \cdot A.}}$$

Med det oppgitte uttrykk for $u_\nu d\nu$ fås pr. tids- og flateenhet

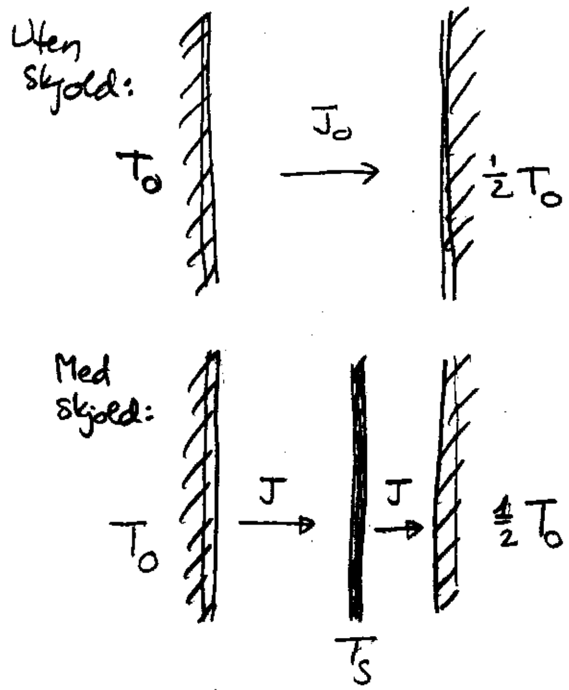
$$\frac{uc}{4} = \frac{c}{4}\,\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1}$$

$$= \underline{\frac{2\pi^5}{15}\,\frac{k^4}{h^3c^2}\,T^4}$$

Dvs

$$\underline{\underline{\sigma = \frac{2\pi^5}{15}\,\frac{k^4}{h^3c^2}}} \qquad \left(\text{ev. } \frac{\pi^2}{60}\,\frac{k^4}{\hbar^3c^2}\right)$$

d)



Energistrømmen mellom den varme platen og skjoldet må være lik energistrømmen fra skjoldet til den kaldere platen når stasjonære forhold har inntrått. Strømmene er proporsjonale med T^4, proporsjonalitetskonstanten er irrelevant.

$$J = \sigma\left(T_0^4 - T_s^4\right)$$
$$J = \sigma\left(T_s^4 - \left(\tfrac{1}{2}T_0\right)^4\right)$$

Addering gir: $2J = \sigma\left[T_0^4 - \left(\frac{1}{2}T_0\right)^4\right] = J_0$, strømmen uten skjold.

Så $\underline{\underline{J = \frac{1}{2}J_0}}$, skjoldet halverer strømmen.

Subtraksjon gir $0 = T_0^4 - 2T_s^4 + \left(\frac{1}{2}T_0\right)^4 = \frac{17}{16}T_0^4 - 2T_s^4$

$$T_s^4 = \frac{17}{32}T_0^4,\ \text{dvs}\ T_s = \underline{\underline{\left(\frac{17}{32}\right)^{\frac{1}{4}}T_0}} = \underline{\underline{0.85\,T_0}}$$