EKSAMEN I 74305 TERMISK FYSIKK
30. 8. 89

Løsningsskisse

Oppgave 1

a)
$$U = \int_0^\infty d\nu \; \frac{8\pi h}{c^3} V \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} = \frac{8\pi h}{c^3} V \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1} = \underline{\underline{aVT^4}}$$

med
$$a = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k}{h}\right)^4 \cdot \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1}}_{\pi^4/15} = \underline{\underline{\frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}}} = \underline{\underline{7.55 \cdot 10^{-16} \frac{J}{K^4 m^3}}},$$

når tallverdier for k, h og c settes inn.

b) Den termodynamiske identitet og $U = aVT^4$ gir
$$TdS = dU + p\,dV = (p + aT^4)\,dV + 4aVT^3 dT$$

$S(T,V) = V \cdot s(T)$ innsatt gir (etter divisjon med T)
$$s(T)\,dV + V s'(T)\,dT = \frac{p + aT^4}{T}\,dV + 4aVT^2\,dT$$

som gir (1) $\quad s'(T) = 4a\,T^2$

og (2) $\quad s(T) = \frac{p+aT^4}{T}$

Integrasjon av (1) gir
$$s(T) = \frac{4}{3}aT^3 + \text{konstant} = \frac{4}{3}aT^3, \quad \text{da } s(0) = 0$$

Med andre ord
$$S = V \cdot s(T) = \underline{\underline{\frac{4}{3}aT^3 V}} \qquad \text{qed}$$

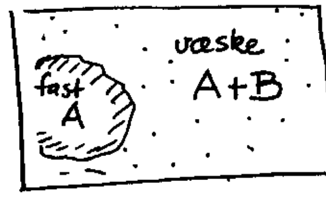
c) (2) under punkt b) gir $\frac{4}{3}aT^3 = \frac{p + aT^4}{T}$, dvs
$$p = \frac{a}{3}T^4 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{U}{V}}} \qquad \text{qed}$$

d)
$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4aVT^3 = 4\frac{U}{T} \quad \text{og} \quad p = \frac{1}{3}\frac{U}{V} \quad \text{gir}$$
$$\xi = \frac{4U}{\frac{1}{3}U} = \underline{\underline{12}}$$

For en klassisk énatomig ideell gass er $C_V = \frac{3}{2}Nk$ og $p = NkT/V$ som gir
$$\xi = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

Oppgave 2

a) Stoff A som kan gå fra den ene fasen til den andre vandrer til



$$\mu_A^{fast} = \mu_A^{væske}, \quad \text{eller}$$

$$\mu_A^{o\,fast}(p_0,T) = \mu_A^{væske}(p_0,T,x_A) = \mu_A^{o\,væske}(p_0,T) + kT \ln x_A$$

når ideell – blandingsuttrykket benyttes. Med $x_A = 1 - x_B$:

$$\underline{\underline{\mu_A^{o\,fast}(p_0,T) - \mu_A^{o\,væske}(p_0,T) = kT \ln(1-x_B)}}$$

b) Vi setter $T = T_0 + \Delta T$, og utvikles til første orden i x_B og i ΔT. Vanlig Taylorutvikling: $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x\, f'(x_0)$.

$$\ln(1-x_B) = -x_B + \mathcal{O}(x_B^2) \quad \text{og} \quad k(T_0+\Delta T)\ln(1-x_B) \approx -kT_0 x_B + \ldots$$

$$\mu^o(p_0, T_0+\Delta T) = \mu^o(p_0,T_0) + \Delta T \frac{\partial \mu^o(p_0 T_0)}{\partial T_0} + \mathcal{O}[(\Delta T)^2]$$

Vi trenger $\frac{\partial \mu^o}{\partial T_0} = \frac{\partial (G^o/N)}{\partial T}\Big|_p = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial G^o}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{N} S^o = -s^o$,

idet $\mu^o = G^o/N$ for rene stoff og av $dG = -SdT + Vdp$ følger $(\partial G/\partial T)_p = -S$. Altså

$$\mu^o(p_0, T_0+\Delta T) = \mu^o(p_0,T_0) - s^o\,\Delta T + \ldots$$

Innsetting i likevektsbetingelsen under a) fås

$$\mu_A^{o\,fast}(p_0,T_0) - \mu_A^{o\,væske}(p_0,T_0) + \Delta T\,(s_A^{o\,væske} - s_A^{o\,fast}) = -kT_0\,x_B$$

For rent A under atmosfæretrykk innstiller likevekten seg ved temperaturen T_0, dvs

$$\mu_A^{o\,fast}(p_0,T_0) = \mu_A^{o\,væske}(p_0,T_0).$$

Det gjenstår

$$\Delta T = -\frac{kT_0\,x_B}{s_A^{o\,væske} - s_A^{o\,fast}}$$

Entropiendringen ved faseovergangen fast → væske ved temperatur T_0 er gitt ved smeltevarmen, da $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_0}$.

Pr. mol: $$N_A(s_A^{o\,væske} - s_A^{o\,fast}) = \frac{l_{sm}}{T_0}$$

Innsatt $$\Delta T = -\frac{N_A k T_0\,x_B}{l_{sm}/T_0}, \quad \text{eller}$$

$$\underline{\underline{\Delta T = -\frac{RT_0^2}{l_{sm}} \cdot x_B}} \qquad \text{"frysepunktdepresjonen"}$$

Oppgave 3

a) Antall partikler med retning i $d\Omega$ omkring retning (ϑ, φ) som treffer arealet A i dt er i middel

$$\frac{d\Omega}{4\pi} \cdot n \cdot A \langle v \rangle dt \cos\vartheta \,, \qquad \text{med } d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Antall som treffer arealet, pr. tids- og flateenhet blir

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\Omega}{4\pi} \, n \langle v \rangle \cos\vartheta = \frac{n\langle v \rangle}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{n\langle v \rangle}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{n}{4} \langle v \rangle}}$$

b)
$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \, f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty dv \, v^3 e^{-mv^2/2kT}$$

$x = mv^2/2kT$ yields

$$\langle v \rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \; 2\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}_{1} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}}$$

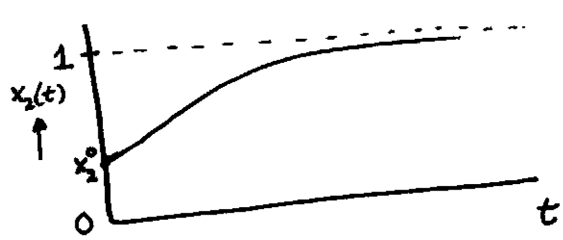
c) La $N_i(t)$ være antall gassmolekyler av type i.

$$dN_i = - V \cdot \frac{N_i A}{4V} \langle v_i \rangle dt \;\Rightarrow\; N_i(t) = N_i(0) \, e^{-\frac{1}{4V} A \langle v_i \rangle t}$$

$$x_2(t) = \frac{N_2(t)}{N_1(t) + N_2(t)} = \frac{N_2(0) e^{-\frac{1}{4V} A \langle v_2 \rangle t}}{N_1(0) e^{-\frac{1}{4V} A \langle v_1 \rangle t} + N_2(0) e^{-\frac{1}{4V} A \langle v_2 \rangle t}} = \frac{N_2(0)}{N_1(0) e^{-\frac{1}{4V} A t (\langle v_1 \rangle - \langle v_2 \rangle)} + N_2(0)}$$

Divisjon med $N_1(0) + N_2(0)$ i teller og nevner gir

$$\boxed{x_2(t) = \frac{x_2^0}{(1 - x_2^0) e^{-ct} + x_2^0}} \,, \qquad \text{med } \underline{c = \frac{A}{4V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi}} \left(m_1^{-\frac{1}{2}} - m_2^{-\frac{1}{2}}\right)}$$



Oppgave 4

a) La ϵ_i være energien til partikkel nr. i, slik at

$$E = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i$$

Middelenergien er $\langle E \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \epsilon_i \rangle = N \cdot \langle \epsilon_i \rangle$, da alle partikler har samme middelverdi. Avviket fra middelverdien er

$$E - \langle E \rangle = \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)$$

Standardavviket er $\Delta E = \sqrt{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}$. Her er

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)(\epsilon_j - \langle \epsilon_j \rangle) \rangle$$

Da partiklene er uavhengige er for $i \neq j$

$$\langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)(\epsilon_j - \langle \epsilon_j \rangle) \rangle = \langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle) \rangle \langle (\epsilon_j - \langle \epsilon_j \rangle) \rangle = 0$$

Bare $i = j$ gjenstår:

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)^2 \rangle = N \langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)^2 \rangle$$

Det gir

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{\sqrt{N}\,\sqrt{\langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)^2 \rangle}}{N\,\langle \epsilon_i \rangle} = \underline{\underline{c\,N^{-1/2}}},$$

der

$$c = \frac{\sqrt{\langle (\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle)^2 \rangle}}{\langle \epsilon_i \rangle}$$

er bestemt av energifluktuasjonene til en eneste partikkel.

b) Maxwells hastighetsfordeling med $\epsilon = \frac{m}{2} v^2$ ($: dv = \frac{d\epsilon}{mv}$) gir direkte

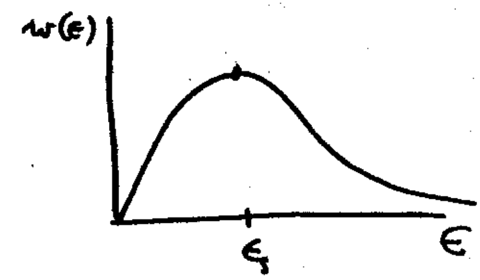
$$w(\epsilon)\, d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\epsilon/kT} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

Sjekk : $\int_0^\infty w(\epsilon)\, d\epsilon = 1$.

$$\langle \epsilon \rangle = \int_0^\infty w(\epsilon)\, d\epsilon \cdot \epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} (kT)^{5/2} \left(\tfrac{3}{2}\right)! = kT \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)! = \underline{\underline{\frac{3}{2} kT}}$$

Andre beregningsmuligheter er via $\langle \epsilon \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$ pluss ekvipartisjonsprinsippet eller Maxwell.



Sannsynligste energiverdi maksimaliseres $w(\epsilon)$. Da

$$w'(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\left[\frac{1}{2}\epsilon^{-1/2} - \frac{\epsilon^{1/2}}{kT}\right]e^{-\epsilon/kT},$$

ser vi at $w'(\epsilon) = 0$ for

$$\underline{\underline{\epsilon_s = \frac{1}{2}kT}}$$

e) Vi må beregne $c = \frac{\sqrt{\langle\epsilon^2\rangle - \langle\epsilon\rangle^2}}{\langle\epsilon\rangle}$ og trenger

$$\langle\epsilon^2\rangle = \int_0^\infty \epsilon^2 w(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \epsilon^{5/2}e^{-\epsilon/kT}\,d\epsilon$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}(kT)^{7/2}\int_0^\infty x^{5/2}e^{-x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}k^2T^2\left(\frac{5}{2}\right)!$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}k^2T^2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{15}{4}k^2T^2$$

Det gir

$$c = \frac{\sqrt{\frac{15}{4}k^2T^2 - \frac{9}{4}k^2T^2}}{\frac{3}{2}kT} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$