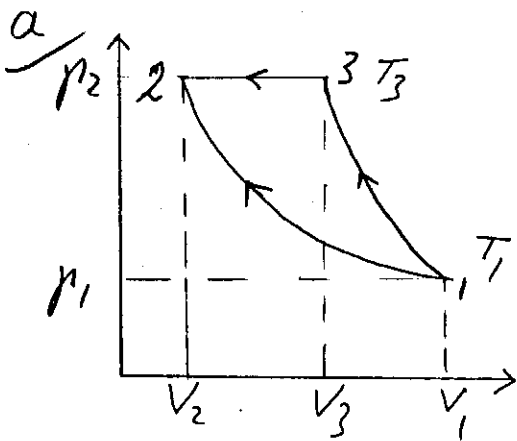


Forslag til løsning.  
Oppgave 1

Kont. eks. i fag 74305  
 termisk fysikk mandag 1/8-91 (1)



Ved den isoterme prosessen

gjelder:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1$$

Ved den adiabatiske prosessen gjelder:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$V_3 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} V_1$$

For å finne temperaturen  $T_3$  benyttes ideell gass  
 likningen.

$$p_1 V_1 = n R T_1$$

$$p_2 V_3 = n R T_3$$

likningene dividert på hverandre gir

$$T_3 = T_1 \frac{p_2 V_3}{p_1 V_1} = \underline{\underline{T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}}}$$

Utført arbeid ved den isoterme prosessen

$$W_I = \int_{V_1}^{V_2} p dV = n R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = n R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \underline{\underline{p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}}$$

Arbeid ved den adiabatiske prosessen ( $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ )

$$W_A = \int_{V_1}^{V_3} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_3} \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \left| -\frac{1}{(\gamma-1)V^{\gamma-1}} \right|_{V_1}^{V_3} = p_1 V_1 \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1}}{\gamma-1}$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

Arbejdet ved konstant tryk fra 3 til 2. (2)

$$W_{32} = p_2(V_2 - V_3) = p_1 V_1 \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right) = p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)$$

Samlet arbejde for processen 1,3,2:

$$W_S = W_A + W_{32} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

Arbejd mod omgivelserne

$$W_o = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)$$

Numerisk:

$$p_1 V_1 = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 3$$

$$W_I = 5,1 \cdot 10^3 \ln(1/3) \text{ J} = \underline{\underline{-5,6 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

$$W_S = 5,1 \cdot 10^3 \frac{1,4}{1,4-1} \left(1 - 3^{\frac{0,4}{1,4}}\right) = \underline{\underline{-6,5 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

$$W_o = 5,1 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \underline{\underline{-3,4 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

Indre energi for en ideel gas er uafhængig af volumet. Ved den isoterme proces er det følgelig ingen ændring i indre energi, dvs

$$\underline{\underline{\Delta U_{12} = 0}}$$

Fra 1 til 3 ændres temperaturen og ændringen i indre energi blir lig udført arbejde med modsat fortegn fordi ikke noe varme utveksles slik at første hovedsetning inneberer  $0 = Q = \Delta U + W$

$$\underline{\underline{\Delta U_{13} = -W_A}}$$

Da indre energi er en tilstandsfunktion må ③  
en videre ha

$$\Delta U_{13} + \Delta U_{32} = \Delta U_{12} = 0$$

$$\Delta U_{32} = -\Delta U_{13} = \underline{\underline{W_A}}$$

For reversibel prosess ved konstant temperatur er endring i entropi bestemt av tilført varme  $Q$  ved

$$T_1 \Delta S_{12} = Q = \Delta U_{12} + W_I$$

eller 
$$\Delta S_{12} = \underline{\underline{\frac{1}{T_1} W_I}}$$

da  $\Delta U_{12} = 0$ . Videre er

$$\Delta S_{13} = \underline{\underline{0}}$$

da denne prosessen er adiabatisk. Siden entropien er en tilstandsfunksjon, har vi så

$$\Delta S_{12} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32}$$

$$\Delta S_{32} = \Delta S_{12} = \underline{\underline{\frac{1}{T_1} W_I}}$$

Da  $\Delta U_{12} = 0$  er oppført varme  $Q$  lik utført arbeid  
For prosessen 132 blir da dette

$$Q = W_S$$

Som i helhet avgis ved prosessen fra 3 til 2.

Denne varmen avgis til omgivelsene med temperaturen  $T_1$ . Omgivelsenes endring i entropi blir følgende

$$S_0 = -\frac{Q}{T_1} = \underline{\underline{-\frac{W_S}{T_1}}}$$

## Oppgave 2.

I likevekt er temperatur, trykk og kjemisk potensial konstante over hele systemet.

Ved frysepunktet vil fast stoff være i likevekt med væsken. Da oppløste stoffer ikke finnes i den faste fasen trenger en bare å se på likevekten for oppløsningsmidlet. For det rene oppløsningsmidlet er likevekten bestemt av

$$\mu_f^0(p; T^0) = \mu_v^0(p; T^0)$$

Her  $\mu_f^0(p; T^0)$  og  $\mu_v^0(p; T^0)$  er kjemisk potensial i henholdsvis fast fase og væskefase for det rene oppløsningsmidlet på frysepunktet  $T^0$  ved trykk  $p^0$ . Ved svak oppløsning ( $\sum x_s \ll 1$ ) kan antagelsen om ideell blanding brukes for oppløsningsmidlet, og det kjemiske potensial i væskefasen blir  $\mu_v(p; T) = \mu_v^0(p; T) + kT \ln x$  der oppløsningsmidlet molbrøk  $x = 1 - \sum x_s$ . Faselikevekt ved samme trykk  $p^0$  gir nå

$$\mu_f^0(p^0; T) = \mu_v(p^0; T) = \mu_v^0(p^0; T) + kT \ln x$$

der  $T = T^0 + \Delta T$ . Utvikler om  $T = T^0$  og finner

$$\mu_f^0(p^0; T) = \mu_f^0(p^0; T^0) + \frac{\partial \mu_f^0}{\partial T} \Delta T + \dots = \mu_f^0(p^0; T^0) - S \Delta T$$

der  $S$  er entropi pr. partikkel,  $S = -\frac{\partial \mu^0}{\partial T} = -\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial N} = \frac{\partial S}{\partial N} = \frac{S}{N}$ .

Her er  $R$  gasskonstanten for 1 mol,  $Q$  er smeltevarmen pr. mol og  $x_s$  er molbrøkene av de oppløste stoffene.

Likvelettsbetingelsen for oppløsningen blir dermed

$$\mu_f^0(p^0, T^0) - s_f \Delta T = \mu_v^0(p^0, T^0) - s_v \Delta T - kT \sum_s x_s$$

da  $\ln x = \ln(1 - \sum_s x_s) = -\sum_s x_s$  for små  $x_s$ . ( $x \approx 1$ )

Multipliserer med Avogadros tall  $N_A$  og får

$$N_A(s_v - s_f) \Delta T = -N_A kT \sum_s x_s$$

eller  $(\Delta Q/T) \Delta T = -RT \sum_s x_s$

$$\Delta T = - \frac{RT^2}{\Delta Q} \sum_s x_s$$

b) Antall mol  $\text{Na}^+$  :  $n_1 = 20/58,5 = 0,342$   
— " —  $\text{Cl}^-$  :  $n_2 = n_1 = 0,342$   
— " — vann :  $n_3 = 1000/18 = 55,6$

Totalt antall mol :  $n = n_1 + n_2 + n_3 \approx 56$  ( $\approx n_3$ )

Molbrøker :  $x_1 = n_1/n$        $x_2 = n_2/n$

Frysepunktredsettelsen blir følgende. ( $T = 273^\circ\text{K} = 0^\circ\text{C}$ )

$$\Delta T = - \frac{1,98 \text{ cal/deg mol} \cdot (273 \text{ deg})^2}{79,1 \cdot 18 \text{ cal/mol}} \cdot \frac{0,342 + 0,342}{56} = \underline{\underline{-1,2}}$$

### Oppgave 3.

6

På den ene siden er varmespenning knyttet til temperaturgradienten ved

$$j(r) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}$$

Total varmespenning er like effekten  $P$ . Så følgelig er  $j(r)$  knyttet til  $P$  ved

$$P = 4\pi r^2 j(r)$$

$$j(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

der  $4\pi r^2$  er areal av kuleflaten med radius  $r$ .

Ved å sammenholde de to uttrykkene for  $j(r)$  finnes differensiallikning for temperaturen

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{P}{4\pi\kappa} \frac{1}{r^2}$$

som integrert gir

$$T = \frac{P}{4\pi\kappa} \frac{1}{r} + \text{konst.}$$

Integrasjonskonstanten er bestemt  $T = T_1$  ved  $r = R_1$ , dvs.

$$T = T_1 + \frac{P}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Temperaturen på ytre kuleflate

$$T_2 = T_1 + \frac{P}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 30^\circ\text{C} + \frac{10}{4\pi \cdot 0,8} \left( \frac{1}{0,2} - \frac{1}{0,1} \right) \\ \approx 30^\circ\text{C} - 10\text{K} = \underline{\underline{20^\circ\text{C}}}$$