Eksamen 25. 8. 1992 TERMISK FYSIKK

Løsningsskisse

Oppgave 1

La oss starte med å beregne temperaturene uttrykt ved T_b og r.

Ideell-gass lov ved konstant trykk $\left(T = \frac{pV}{NR T}\right)$ gir $T_a = T_b \frac{V_a}{V_b} = \underline{r\, T_b}$.

Adiabatlikningen gir $p_c V_c^{\gamma} = p_a V_a^{\gamma}$.
Vha ideell-gass likningen igjen ved konstant volum fås $p_c / T_c = p_b / T_b = p_a / T_b$, som innsatt i adiabatlikningen gir

$$T_c = T_b \,(V_a/V_c)^{\gamma} = \underline{T_b\, r^{\gamma}}$$

~~Så~~ til spørsmålene:

a) $U_c - U_a = C_V (T_c - T_a) = \underline{\underline{C_V T_b \,(r^{\gamma} - r)}}$

b) Varmemengdene er

$$Q_{ab} = C_p (T_b - T_a) = C_p T_b (1 - r) \quad < 0$$
$$Q_{bc} = C_V (T_c - T_b) = C_V T_b (r^{\gamma} - 1) \quad > 0$$
$$Q_{ca} = 0$$

Arbeidet utført pr. syklus $(\Delta U_{syklus} = 0)$ er

$$W = Q_{ab} + Q_{bc} \, ,$$

mens tilført varmemengde er Q_{bc}.
Virkningsgrad:

$$\eta = \frac{W}{Q_{bc}} = 1 + \frac{Q_{ab}}{Q_{bc}} = 1 + \frac{C_p}{C_V} \frac{(1-r)}{r^{\gamma} - 1} \, ,$$

eller

$$\underline{\underline{\eta = 1 - \gamma \frac{r-1}{r^{\gamma} - 1}}}$$

Alternativt kan arbeidet beregnes direkte som $\int p\, dV$.

c) For en ênatomig ideell gass er de molare varmekapasiteter $C_{mV} = \frac{3}{2}R$ og $C_{mp} = \frac{5}{2}R$, ∴: $\underline{\underline{\gamma = 5/3}}$.

For $r = 3$:

$$\eta = 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{3-1}{3^{5/3}-1} = \underline{\underline{0.36}}$$

d) Da $c-a$ er en adiabat, med ingen varmemengder utvekslet, så

$$S_c - S_a = \int \frac{dQ_{rev}}{T} = 0 \; ; \; \underline{\underline{S_c = S_a}}$$

Langs isobaren ab er $dQ = C_p \, dT$ slik at

$$S_b - S_a = \int_{T_a}^{T_b} \frac{C_p \, dT}{T} = C_p \ln \frac{T_b}{T_a} = -C_p \ln r$$

$$S_b = \underline{\underline{S_a - C_p \ln r}}.$$

Oppgave 2

a) $T_1 \simeq 70°$ $\qquad$ $T_2 \simeq 75.3°$

$x_1 \simeq \underline{\underline{0.64}}$ $\qquad$ $x_2 \simeq \underline{\underline{0.95}}$

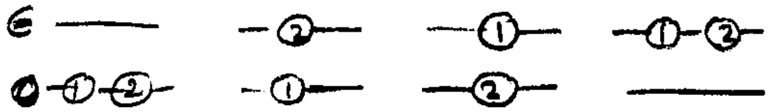
b) $T_3 = \underline{\underline{66°}}$

Oppgave 3

a) Identiske fermioner kan ikke være i samme ènpartikkel tilstand, så de to partiklene er i hver sin ènpartikkeltilstand, så

$$\langle E \rangle_a = \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{for alle } T.$$

b) For ikke identiske partikler er der fire mulige tilstander (m)



$E_m = \quad 0 \qquad \epsilon \qquad \epsilon \qquad 2\epsilon$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{energi for} \\ \text{topartikkelsyst.} \end{array} \right.$

Partisjonsfunksjonen $Z = \sum_m e^{-\beta E_m}$ $\left(\beta = \frac{1}{kT}\right)$ er

$$Z = 1 + 2e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon},$$

og middelenergien

$$\langle E_b \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{2\epsilon e^{-\beta\epsilon} + 2\epsilon e^{-2\beta\epsilon}}{1 + 2e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}}$$

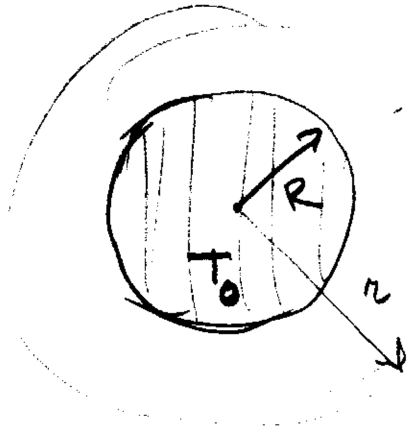
Ved temperaturen $T = \frac{\epsilon}{k \ln 2}$ er $e^{-\beta\epsilon} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$

$$\langle E_b \rangle = \frac{2\epsilon \frac{1}{2} + 2\epsilon \frac{1}{4}}{1 + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\epsilon}}$$

Alternativt kunne en, fordi partiklene er uavhengige, beregne middelenergien for én partikkel, og multiplisere med 2.

En kunne benytte sannsynlighetene p_0 og p_ϵ for å være i de to tilstandene, og at $p_\epsilon / p_0 = e^{-\epsilon/kT} = \frac{1}{2}$. Dvs $p_0 = \frac{2}{3}$ og $p_\epsilon = \frac{1}{3}$. Middelenergien for to partikler blir da $2 \cdot \left(0 \cdot \frac{2}{3} + \epsilon \cdot \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}\epsilon}}$

Oppgave 4



I stasjonær tilstand må samme varmemengde passere enhvert kuleskall pr. tidsenhet. Og da varmestrømmen er $\varkappa \frac{dT}{dr}$ vil det si at

$$\varkappa \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = \text{konstant}$$
(uavh. av r)

$$\frac{dT}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$$ vil si

$$T(r) = \frac{A}{r} + B$$

Med $T(\infty) = T_V$ fås $B = T_V$ og med $T(R) = T_0$ fås $A = R(T_0 - T_V)$

$$\underline{\underline{T(r) = (T_0 - T_V)\frac{R}{r} + T_V}}$$

b) Transportert varme pr. tidsenhet er

$$P = \varkappa \cdot \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \underline{\underline{4\pi R \varkappa (T_0 - T_V)}},$$

og dette er effekten som må til for å holde temperaturfordelingen vedlike.