Eksamen 27.5.92 i TERMISK FYSIKK

Løsningskisse

Oppgave 1

a) I adiabatlikningen $pV^{\gamma} = \text{konstant}$ innsettes tilstandslikningen for en ideell gass $p = NkT/V$:

$$\frac{NkT}{V} \cdot V^{\gamma} = \text{konstant}, \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant}}}$$

b) Da S er en tilstandsfunksjon, er $\underline{\underline{\Delta S = 0}}$ for en hel syklus.

T.h. er vist en av besvarelsene

b) Mel.: Bamses fødselsdag

Vår entropi er en funksjon av tilstanden alene,
Da er den lik ved start hver gang, det kan vi på det rene.
Om vi går en syklus full
blir dens endring bare null.
Hipp, hurra for entropi, som er så snill og blid.

c) Relasjonen kan vises på flere måter, her to.

$\boxed{\text{Metode 1}}$:

$$\Delta S = \int_2^3 \frac{đQ}{T} + \int_4^1 \frac{đQ}{T} = C_p \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} + C_V \int_{T_4}^{T_1} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2} + C_V \ln \frac{T_1}{T_4} =$$

$$= C_V \ln \left[\left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\gamma} \frac{T_1}{T_4} \right] = 0,$$

iflg b). Dvs $\left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\gamma} \frac{T_1}{T_4} = 1$ eller $\underline{\underline{T_1 T_3^{\gamma} = T_4 T_2^{\gamma}}}$

$\boxed{\text{Metode 2}}$:

Adiabatlikningene $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ og $T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$ gir ved divisjon

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1}.$$

Langs isobaren 2-3 er $\frac{NkT_2}{V_2} = \frac{NkT_3}{V_3}$ ⸪ $\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3}$,

som innsatt gir $\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\gamma}$. eller $\underline{\underline{T_1 T_3^{\gamma} = T_4 T_2^{\gamma}}}$.

d)

$$Q_{23} = \int_{T_2}^{T_3} C_p \, dT = \underline{\underline{C_p (T_3 - T_2)}}$$

$$W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p_2 \, dV = \underline{\underline{p_2 (V_3 - V_2)}}$$

e) $$Q_{41} = \int_{T_4}^{T_1} C_V \, dT = \underline{\underline{-C_V(T_4 - T_1)}}$$

$$W_{41} = \int_{V_4}^{V_1} p\,dV = \underline{\underline{0}}$$

Endringen i indre energi når prosessen løper fra $4 \to 1$ er ifølge første hovedsetning $\Delta U = Q_{41} - W_{41} = -C_V(T_4 - T_1)$.
ΔU_{41}, definert i oppgaven som indre-energi-forskjellen $U_4 - U_1$ er det negative av dette: $\Delta U_{41} = \underline{\underline{C_V(T_4 - T_1)}}$

Følger alternativt av $U = C_V T + U_0$ for ideell gass.

f) I ett omløp er $\Delta U = 0$, dvs $W = Q_{23} + Q_{41}$.
Tilført varme er Q_{23}, så virkningsgraden er

$$\eta = \frac{W}{Q_{tilført}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{C_V(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_3} - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_3}}$$

Adiabatlikningene er $T_4 V_1^{\gamma - 1} = T_3 V_3^{\gamma - 1} \supset: \frac{T_4}{T_3} = r_e^{-\gamma + 1}$, og
$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1} \supset: \frac{T_1}{T_2} = r_k^{-\gamma + 1}$

Langs isokoren: $\frac{T_2}{T_3} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{r_e}{r_k}$, som gir $\frac{T_1}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}\frac{T_2}{T_3} = r_k^{-\gamma} r_e$

Innsatt:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{r_e^{-\gamma + 1} - r_k^{-\gamma} r_e}{1 - r_e / r_k} = \underline{\underline{1 - \frac{r_e^{-\gamma} - r_k^{-\gamma}}{\gamma\left(r_e^{-1} - r_k^{-1}\right)}}}$$

g) For énatomig ideell gass er $C_V = \frac{3}{2} Nk$ og $C_p = \frac{5}{2} Nk$, dvs $\gamma = C_p / C_V = 5/3$. Tallverdi:

$$\eta = 1 - \frac{3}{5} \frac{6^{-5/3} - 18^{-5/3}}{6^{-1} - 18^{-1}} = \underline{\underline{0.77}}$$

Oppgave 2

a) Med Maxwells hastighetsfordeling $f(v)$ fås

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v\, f(v)\, dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \cdot \frac{kT}{m} \cdot \frac{2kT}{m} \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

med ny variabel $x = \frac{mv^2}{2kT}$; $dx = \frac{mv}{kT} dv$. Integralet er $1! = 1$:

$$\langle v \rangle = \underline{\underline{\sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}}}$$

b) Samme substitusjon gir

$$\langle v^{-1} \rangle = \int_0^\infty v^{-1} f(v)\, dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \frac{kT}{m} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{0! = 1} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{m}{kT}}}}$$

c) Antall molekyler som treffer A i tida dt er

$$dN = \frac{nA}{4}\langle v\rangle\, dt \qquad \text{(vha oppgitt støt-tallformel)}$$

Her er antall partikler pr. volumenhet lik

$$n = \frac{N}{V} = \frac{NkT}{V}\frac{1}{kT} = \frac{p}{kT} \qquad \text{(ideell gass lov)}$$

Når molekyltallet dN fjernes synker trykket:

$$dp = -dN\frac{kT}{V} = -p\frac{A}{4V}\langle v\rangle dt \,, \quad \text{eller}$$

$$-\frac{dp}{p} = \frac{A\langle v\rangle}{4V}\, dt$$

Integrasjon fra p_0 til p gir

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{A\langle v\rangle}{4V}\, t$$

$$\underline{\underline{t = \frac{4V}{A\langle v\rangle}\ln\frac{p_0}{p}}} = \underline{\underline{\frac{V}{A}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\ln\frac{p_0}{p}}}\,.$$

Tallverdier innsatt, med $m = \frac{0.018\text{ kg}}{N_A}$ og $kN_A = R$

$$t = \frac{10^{-3}}{10^{-2}}\sqrt{\frac{2\pi\ 0.018}{8.31\cdot 300}}\ \ln(10^5) = \underline{\underline{0.78\,\text{s}}} \qquad \text{(SI-enheter)}$$

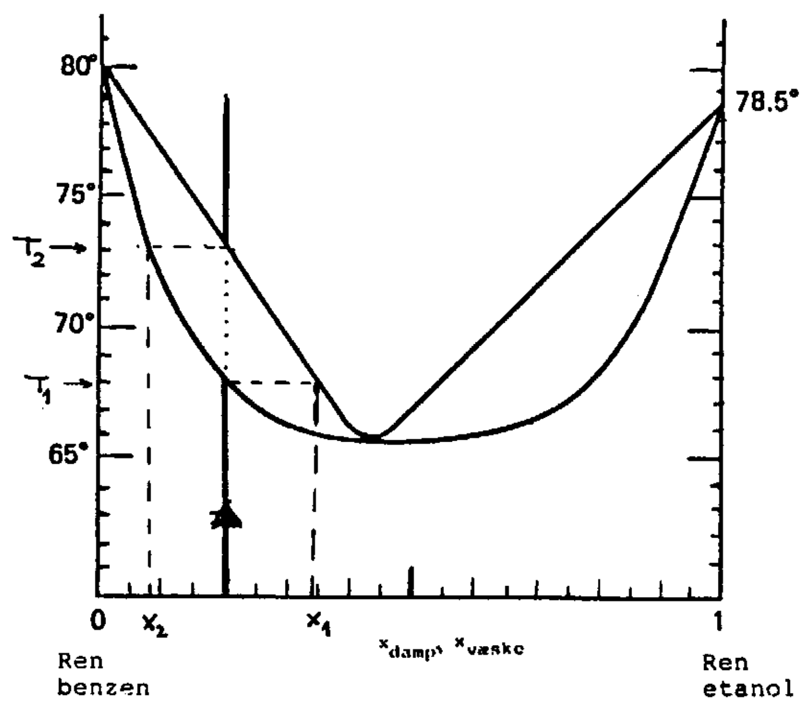
Oppgave 3

a) Avlesning av diagrammet gir (molbrøker for etanol)

$T_1 \simeq \underline{\underline{68^\circ C}}$, $T_2 \simeq \underline{\underline{73^\circ C}}$, $x_1 \simeq \underline{\underline{0.34}}$, $x_2 \simeq \underline{\underline{0.08}}$

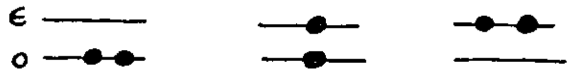
b) For $x = x_1 \simeq 0.34$ starter koking ved $T \simeq \underline{\underline{66^\circ C}}$

Utledning eller figur var ikke påkrevd.



Oppgave 4.

a) Spinn-0 partikler er <u>bosoner</u>, ingen begrensning på besettelsestallene. Med identiske partikler er da systemets konfigurasjoner flg. tre:



med energier: 0 $\quad\epsilon\quad$ 2ϵ

Partisjonsfunksjonen er ($\beta = 1/kT$)

$$Z = \sum_k e^{-\beta E_k} = 1 + e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}$$

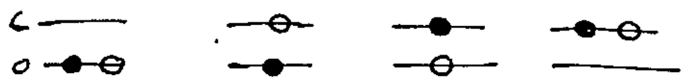
og den midlere energi

$$\langle E\rangle_a = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \epsilon\,\frac{e^{-\beta\epsilon} + 2e^{-2\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}+e^{-2\beta\epsilon}}$$

For $T = \frac{\epsilon}{k\ln 2}$ er $e^{-\beta\epsilon} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$, som gir

$$\langle E\rangle_a = \epsilon\,\frac{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{4}{7}\epsilon}}$$

b) Når bosonene <u>ikke</u> er identiske er der fire ulike konfigurasjoner:



med energier 0 $\quad\epsilon\quad$ ϵ $\quad 2\epsilon$

Partisjonsfunksjon er $Z = 1 + 2e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} = (1+e^{-\beta\epsilon})^2$

og middelenergien

$$\langle E\rangle_b = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{2\epsilon\, e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}} = \frac{2\epsilon\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\epsilon}}$$

Oppgave 5

a) Da vekten av skiven med tykkelse dl er $\rho A\,dl$, er

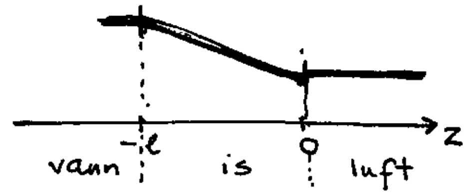
$$dQ = \underline{\underline{l_{sm}\,\rho A\,dl}}.$$

b) Temperaturprofilet finnes fra den stasjonære varmeledningslikningen, med z-akse vertikalt oppover,

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0 , \quad \therefore \quad T(z) = A + Bz$$

Med origo i isoverflata er $T(0) = T_0 = -10^\circ C$ og $T(-\ell) = T_V = 0^\circ C$. Det bestemmer A og B. Resultat

$$\underline{\underline{T(z) = T_0 - \frac{z}{\ell}(T_V - T_0)}}$$



Varmestrømmen blir, etter Fourier's lov:

$$J_z = -\kappa \frac{dT}{dz} = +\kappa \frac{T_V - T_0}{\ell} .$$

Da varmestrøm er transportert varmemengde pr. tids- og flateenhet vil det i tida dt transporteres en varmemengde

$$dQ = A\, J_z\, dt = A\kappa \frac{T_V - T_0}{\ell}\, dt$$

Ved å sammenlikne med punkt a) ser vi hvor meget tykkelsen kan øke i dt:

$$l_{sm}\, \rho A\, d\ell = A\kappa \frac{T_V - T_0}{\ell}\, dt$$

$$\ell\, d\ell = \frac{\kappa}{\rho\, l_{sm}}(T_V - T_0)\, dt$$

Da $T_V - T_0$ er konstant fås ved integrasjon

$$\frac{1}{2}\,\ell(t)^2 = \frac{\kappa}{\rho\, l_{sm}}(T_V - T_0)(t - t_0)$$

Dvs

$$\underline{\underline{\ell(t) = C\sqrt{t - t_0}}}$$

med

$$\underline{\underline{C = \sqrt{\frac{2\kappa(T_V - T_0)}{\rho\, l_{sm}}}}}$$