

## Eksamen Termisk fysikk 17/8 1993. Løsningsforslag

### Oppgave 1

a) Ved å sette  $V = V_2 = 2V_1$  i uttrykket for trykket langs prosessvegen X fås

$$p_2 = \underline{p_1},$$

trykket i slutt-tilstanden er lik trykket i start-tilstanden.

Temperaturen i tilstand 2 fås fra tilstandslikningen for en ideell gass:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R} = \frac{2p_1 V_1}{R} = \underline{\underline{2T_1}}.$$

Arbeidet som utføres under prosessen er

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 \left[ \frac{V^2}{2V_1} - \frac{(V - V_1)^3}{3V_1^2} \right]_{V_1}^{2V_1} = \underline{\underline{\frac{7}{6} p_1 V_1}} = \underline{\underline{\frac{7}{6} RT_1}}.$$

b) Etter første hovedsetning er

$$Q_{12} = W_{12} + U_2 - U_1.$$

Arbeidet ble beregnet i punkt a), og den indre energi for en ideell gass er en funksjon av temperaturen alene. I dette tilfellet

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T.$$

Det gir

$$Q_{12} = \frac{7}{6} RT_1 + \frac{3}{2} RT_1 = \underline{\underline{\frac{8}{3} RT_1}}.$$

c) Entropien er en tilstandsfunksjon, og det er likegyldig hvilken veg mellom tilstand 1 og tilstand 2 vi benytter for å beregne entropiforskjellen. Siden  $p_2 = p_1$  er en isobar prosess hensiktsmessig. Ved konstant trykk er  $dQ = C_p dT$ , der  $C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R$  for denne ideelle gassen.

Entropiforskjellen blir derfor

$$\Delta S_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \underline{\underline{\frac{5}{2} \ln 2R}} = \underline{\underline{1.73R}}.$$

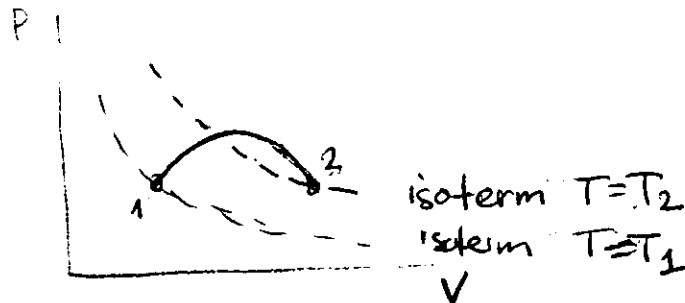
d) Gassen oppnår ikke sin høyeste temperatur i sluttpunkt 2. Dette kan vises på flere måter. Det enkleste er å se på helningene i  $p - V$ -diagrammet i endepunkt 2. Helningen av prosessvegen er

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_X = p_1 \left[ \frac{1}{V_1} - 2 \frac{V - V_1}{V_1^2} \right]_{V=2V_1} = -\frac{p_1}{V_1},$$

mens helningen av isothermen  $p = RT_2/V$  gjennom slutt punktet er

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_2} = -\frac{RT_2}{V^2} = -\frac{2RT_1}{4V_1^2} = -\frac{p_1}{2V_1}.$$

Isothermen med temperatur  $T_2$  må da, som vist i figuren, skjære prosess-vegen i to punkter, og den mellomliggende del av prosessen må foregå ved høyere temperatur enn  $T_2$ .



*Kommentar:* En alternativ framgangsmåte er å beregne maksimaltemperaturen, eller i hvert fall å vise at temperaturen har et maksimum langs veg  $X$ . Temperaturen undervegs følger av tilstandslikningen  $T = pV/R$ , dvs

$$T = \frac{p_1 V}{R} \left[ 1 + \frac{V - V_1}{V_1} - \left( \frac{V - V_1}{V_1} \right)^2 \right].$$

Derivasjon med hensyn på  $V$  lokaliserer maksimumspunktet til å finne sted for  $V = (1 + \sqrt{\frac{2}{3}})V_1$ , altså undervegs.

e) Nær starten er  $p \simeq (p_1/V_1)V$ , og  $T = pV/R \simeq (p_1/RV_1)V^2$ . La oss beregne hvor meget varme  $dQ$  vi må tilføre for å heve temperaturen fra  $T_1$  til  $T_1 + dT$ . Etter første hovedsetning er

$$dQ = dW + dU = pdV + dU = p_1 dV + C_V dT.$$

Sammenhengen mellom  $dT$  og  $dV$  følger av  $T \simeq (p_1/RV_1)V^2$ :  $dT = 2p_1 R^{-1} dV$ . Det gir

$$dQ = \frac{1}{2} R dT + C_V dT = 2R dT.$$

Varmekapasiteten følger umiddelbart:

$$C_X^{start} = \frac{dQ}{dT} = \underline{\underline{2R}}.$$

Da varmekapasiteten er definert som forholdet mellom tilført varme ( $dQ$ ) og temperaturøkning ( $dT$ ) vil  $C_X$  divergere dersom temperaturøkningen er *null* mens tilført varmeenergi er forskjellig fra null. På det stedet der temperaturen har et maksimum vil en liten volumøkning kreve tilført varme for å dekke det utførte arbeid, men temperaturen endres

ikke. Dvs at  $C_X$  må divergere i et punkt.

## Oppgave 2

a) Stoff A kan være tilstede i begge faser, og likevekt innstiller seg slik at

$$\mu_A^{fast}(p_0, T) = \mu_A^{v\ae sk e}(p_0, T, x_A).$$

Da væskeblandingen er ideell, og den faste fasen ren (indikert med øvre indeks null), kan dette skrives

$$\underline{\underline{\mu_A^{0,fast}(p_0, T) = \mu_A^{0,v\ae sk e}(p_0, T) + kT \ln(1 - x_B)}}$$

b) Ved temperaturen  $T_0$  er

$$\mu_A^{0,fast}(p_0, T_0) = \mu_A^{0,v\ae sk e}(p_0, T_0).$$

Vi kan derfor skrive likevektsbetingelsen i punkt a) som

$$\mu_A^{0,fast}(p_0, T_0 + \Delta T) - \mu_A^{0,fast}(p_0, T_0) = \mu_A^{0,v\ae sk e}(p_0, T_0 + \Delta T) - \mu_A^{0,v\ae sk e}(p_0, T_0) + kT \ln(1 - x_B)$$

Til første orden i  $\Delta T$  er

$$\mu^0(p, T + \Delta T) = \mu^0(p, T) + \Delta T \frac{\partial \mu^0(p_0, T)}{\partial T},$$

der vi trenger (for det rene stoffet A) at

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_T = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_T = -\frac{S}{N} = -\frac{S_A}{N_A}$$

I siste ledd har vi innført entropi pr. mol,  $S_A$ . Ved innsetting får vi

$$\Delta T(-S_A^f + S_A^v) = N_A kT \ln(1 - x_B) = RT \ln(1 - x_B) \simeq -RT_0 x_B,$$

ved å erstatte  $T = T_0 + \Delta T$  med laveste ordens uttrykk  $T_0$  på høyre side, og også å utvikle logaritmen til første orden i  $x_B$ . Altså

$$\Delta T = -\frac{RT_0}{S_A^v - S_A^f} x_B.$$

Tilslutt gjenstår å uttrykke entropiforskjellen ved smeltevarmen. Da smelting av et rent stoff foregår ved konstant temperatur er

$$S^v - S^f = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_0} \int dQ = \frac{L_{sm}}{T_0}.$$

Innsatt:

$$\Delta T = -\frac{RT_0^2}{L_{sm}} x_B.$$

### Oppgave 3

Sannsynligheten for å finne et kvantemekanisk system i  $r$ 'te energieigenstand er

$$p_r = \frac{e^{-E_r/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}}$$

Med  $r = 1$  og innsetting av energiuttrykket fås

$$p_1 = \frac{e^{-2E_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2E_0n/kT}} = \frac{e^{-2E_0/kT} (1 - e^{-2E_0/kT})}{1 - e^{-2E_0/kT}},$$

da summen er en enkel geometrisk rekke.

### Oppgave 4

a) Ved å bruke at

$$\frac{\partial}{\partial L} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial L}$$

og tilsvarende for  $U(L, T)$  får vi ved innsetting av uttrykkene for  $\partial S/\partial T$  og  $\partial S/\partial L$ :

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial L \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial U}{\partial L} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial L} - \frac{1}{T} \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_L + \frac{f}{T^2}.$$

Ved multiplikasjon med  $T^2$  gir dette

$$\frac{\left( \frac{\partial U}{\partial L} \right)_T}{T} = f - T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_L.$$

b) Da  $f$  er proporsjonal med  $T$  er  $(\partial f/\partial T)_L = f/T$ , som innsatt i likningen over gir

$$\frac{\left( \frac{\partial U(L, T)}{\partial L} \right)_T}{T} = 0.$$

Dvs  $U = U(T)$ .

c) Da  $U = U(T)$  er  $dU = C_L dT$  og første hovedsetning kan skrives

$$dQ = C_L dT - f dL.$$

Under adiabatisk endring er  $dQ = 0$ , dvs

$$C_L dT = f dL = aT \left[ \frac{L}{L_0} + \left( \frac{L}{L_0} \right)^2 \right] dL$$

Ved divisjon med  $T$  og integrasjon fås

$$C_L \int_{T_b}^{T_s} \frac{dT}{T} = a \int_{L_0}^{2L_0} \left[ \frac{L}{L_0} + \left( \frac{L}{L_0} \right)^2 \right] dL,$$

som gir

$$C_L \ln \frac{T_s}{T_b} = aL_0 \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{3} \right) = \frac{23}{6} aL_0.$$

Løst med hensyn på slutt-temperaturen:

$$T_s = \underline{\underline{T_b e^{23aL_0/6C_L}}}.$$

Uten varmeoverføring er arbeidet  $W$  (ifølge første hovedsetning) lik  $-\Delta U$ :

$$W = \underline{\underline{-C_L(T_s - T_b)}},$$

med  $T_s$  gitt ved ovenstående uttrykk.

### Oppgave 5

a) Sannsynligheten for å finne, i termisk likevekt, et klassisk system av  $N$  identiske partikler med impulser og posisjoner i  $d\Omega = d^3p_1 d^3r_1 \dots d^3p_N d^3r_N$  er lik  $w d\Omega$ , med sannsynlighetstettheten

$$w = \frac{1}{Z} \frac{1}{N! h^{3N}} e^{-\beta E}.$$

Midlere energi er derfor

$$\langle E \rangle = \int \dots \int E w d\Omega = \frac{1}{Z} \frac{1}{N! h^{3N}} \int \dots \int E e^{-\beta E} d\Omega = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z = \underline{\underline{-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z}}.$$

b) Uten potensiell energi gir integralene over posisjonene i partisjonsfunksjonen en faktor  $V^N$ . Når den kinetiske energi består av additive bidrag vil integralet over impulsene bli produktet av integralene for hver partikkel, dvs produktet av  $N$  like integral hver av formen

$$\int \int \int e^{-\beta c p_i} d^3 p_i = \int_0^\infty e^{-\beta c p_i} 4\pi p_i^2 dp_i.$$

Vi har innført kulekoordinater i impulsrommet da integranden er kulesymmetrisk. Ny variabel  $x = \beta c p_i$  gir dette integralet lik

$$4\pi(\beta c)^{-3} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 8\pi(\beta c)^{-3}$$

Innsatt i partisjonsfunksjonen får vi alt i alt

$$Z = \frac{(8\pi V \beta^{-3} c^{-3})^N}{\underline{\underline{N! h^3}}},$$

der  $\beta = 1/kT$ .

Et makroskopisk systems indre energi er systemets midlere energi. Formelen i punkt a) gir

$$U = \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta}(-3N \ln \beta + \beta\text{-uavhengige ledd}) = \frac{3N}{\beta} = \underline{\underline{3NkT}}.$$

c) Tilstandslikningen blir

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = \underline{\underline{\frac{NkT}{V}}},$$

lik tilstandslikningen for en ideell gass.