Eksamen i fag 74306 Termisk fysikk
Lørdag, 3/6 – 95.



## Forslag til løsning.

### Oppgave 1.

a) Langs adiabatene gjelder

$$pV^{\gamma} = \text{konst}$$

Eliminerer $V$ v.h.a. $pV = RT$ og finner

$$p\left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma} = \text{konst}$$

$$p\,T^{\alpha} = \text{konst} \qquad \alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Med $C_p = C_v + R$ for ideell gass finner en så

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\alpha = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p}{R} = \frac{7}{2} = \underline{3{,}5}$$

Til å bestemme $p_0$ og $p_2$ får vi nå likningene

$$p_3 T_3^{\alpha} = p_2 T_2^{\alpha}$$

$$p_0 T_0^{\alpha} = p_2 T_1^{\alpha}$$

som løst gir

$$p_2 = \underline{\underline{p_3\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\alpha}}}$$

$$p_0 = p_2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\alpha} = \underline{\underline{p_3\left(\frac{T_0 T_2}{T_1 T_3}\right)^{\alpha}}}$$

b) Langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs.

$$Q_{01} = Q_{23} = \underline{0.}$$



Langs isobarene har vi oppvarming (avkjøling) ved konstant trykk, dvs.

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) = \alpha R(T_2 - T_1) = \underline{\underline{\tfrac{7}{2}R(T_2 - T_1)}} \; (>$$

$$Q_{30} = C_p(T_0 - T_3) = \alpha R(T_0 - T_3) = \underline{\underline{\tfrac{7}{2}R(T_0 - T_3)}} \; (<$$

Langs isotermen er tilført varme lik utført arbeid da konstant temperatur ikke gir endring av indre energi for ideell gass. Når $pV = RT$ og resultatet fra punkt a) benyttes blir arbeidet

$$Q_{00} = \int_{V_3}^{V_0} p\,dV = RT_0\int_{V_3}^{V_0}\frac{dV}{V} = RT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_3}\right)$$

$$= RT_0 \ln\left(\frac{p_3}{p_0}\right) = RT_0 \ln\left(\frac{T_1 T_3}{T_0 T_2}\right)^{\alpha} = \underline{\underline{\alpha R T_0 \ln\left(\frac{T_1 T_3}{T_0 T_2}\right)}} \; (<$$

c) For ideell gass avhenger indre energi kun av temperaturen. Følgelig må vi da ha ($C_v = (\partial U/\partial T)_v$)

$$U_1 = U_3 + C_v(T_1 - T_3) = \underline{U_3 + \tfrac{5}{2}R(T_1 - T_3)}$$

Entropien er en tilstandsstørrelse. Ved å følge adiabaten til temperaturen $T_2$ endres ikke entropien. Langs isobaren til $T_1$ kan $T\,dS = dQ = C_p\,dT$ benyttes. Følgelig,

$$S_1 = S_3 + 0 + \int_2^1 dS = S_3 + C_p\int_{T_2}^{T_1}\frac{dT}{T} = \underline{\underline{S_3 - \tfrac{7}{2}R\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}}$$

$(C_p = \alpha R = \tfrac{7}{2}R)$

b Arbeidet $W$ kan nå bestemmes ved å summere tilførte varmemengder ($Q_{ij} \gtrless 0$). Dette følger av første hovedsetning (energibevarelse) da $\Delta U = 0$ når en er tilbake til utgangspunktet ($Q = \Delta U + W = W$)

$$W = \Sigma Q_{ij} = Q_{12} + Q_{30} + Q_{00}$$

Tilført varme ($Q_{ij} > 0$) er så $Q_2 = Q_{12}$.
Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 + \frac{Q_{30} + Q_{00}}{Q_{12}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_3 - T_0 + T_0 \ln\left(\frac{T_1 T_2}{T_0 T_3}\right)}{T_2 - T_1}}}$$

## Oppgave 2.

a Samlet varmestrøm gjennom en sylinder av lengde $L$ og radius $r$ er

$$\dot{Q} = 2\pi r L j$$

Varmestrømtettheten $j$ er relatert til temperaturgradienten ved

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}$$

Ved stasjonære forhold er $\dot{Q}$ uavhengig av $r$.
Dette gir

$$\dot{Q} = -2\pi r L \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$$

eller $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A}{r} + B$

der $A = -\frac{\dot{Q}}{2\pi \kappa L} = $ konst.



Ved integrering blir følgelig løsningen

$$\underline{\underline{T = A \ln r + B}} \qquad (B = \text{konst})$$

[Dette kan også bestemmes ut fra varmeledningslikningen $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $\nabla^2 T = 0$. Med sylindersymmetri er da $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ som løst også gir $T = A \ln r + B$.]

b Med de gitte grensebetingelser på indre og ytre sylinderflate finner en ved å bruke resultatet fra punkt a

$$A \ln R_1 + B = T_1$$
$$A \ln R_2 + B = T_2$$

Første likning gir $B = T_1 - A \ln R_1$ som innsatt i 2. likning gir

$$A(\ln R_2 - \ln R_1) + T_1 = T_2$$

$$\underline{A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}}$$

Ved å benytte punkt a) finner en så for total varmemengde pr. tidsenhet

$$\dot{Q} = -2\pi \kappa L A = \underline{\underline{2\pi \kappa L \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)}}}$$

c) Varmestrømtettheten $j$ ved ytre flaten av røret må være lik varmestrømmen ut i luft (da energi ikke samles opp på overflaten). Følgelig

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{R_2} = -\kappa A \frac{1}{r}\bigg|_{R_2} = -\kappa \frac{A}{R_2} = h(T_2 - T_0)$$

Denne likningen bestemmer $T_2$, og med $A$ innsatt finner en

$$\frac{\kappa}{R_2 \ln(R_2/R_1)}(T_1 - T_2) = h(T_2 - T_0) = h(T_2 - T_1) + h(T_1 - T_0)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{h(T_1 - T_0)}{\frac{\kappa}{R_2 \ln(R_2/R_1)} + h} = \frac{h R_2 \ln(R_2/R_1)}{\kappa + h R_2 \ln(R_2/R_1)}(T_1 - T_0)$$

$$\dot{Q} = 2\pi\kappa L \, \frac{h R_2}{\kappa + h R_2 \ln(R_2/R_1)}(T_1 - T_0)$$

d) Maksimum finnes ved å derivere $\dot{Q}$ med hensyn på $R_2$.

$$0 = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R_2} = \text{konst.} \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{\frac{\kappa}{R_2} + h \ln(R_2/R_1)}\right) =$$

$$\text{konst.} \frac{-\frac{\kappa}{R_2^2} + \frac{h}{R_2}}{\left(\frac{\kappa}{R_2} + h \ln(R_2/R_1)\right)^2}$$

som løst gir

$$R_m = R_2 = \frac{\kappa}{h}$$



## Oppgave 3.

a) Sannsynligheten for at en partikkel skal være i en tilstand med energi $E_n$ er ($\beta = 1/kT$)

$$W_n = C e^{-\beta E_n}$$

der normeringskonstanten $C$ er bestemt av at $\sum_n W_n = 1$, dvs.

$$C^{-1} = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad (\textstyle\sum_n \text{ over tilstander})$$

Med degenerasjon er sannsynligheten for å ha energi $E_n$ gitt ved

$$p_n = g_n W_n$$

og

$$C^{-1} = \sum_n g_n e^{-\beta E_n} \qquad (\textstyle\sum_n \text{ over energier})$$

Med de gitte $E_i$ og $g_i$ finner en dermed følgende sannsynlighet for at partikkelen har energi $E_1$

$$p_1 = \frac{3 e^{-2\beta\varepsilon_0}}{1 + 3 e^{-2\beta\varepsilon_0} + 5 e^{-6\beta\varepsilon_0}}$$

b) Ved $T = 0$ befinner systemet seg i grunntilstanden. Med $g_0 = 1$ er det bare 1 tilstand med denne energien. Det er da bare 1 mikrotilstand pr. partikkel, og for $N$ uavhengige slike partikler er det da $W = 1^N = 1$ tilstander. Etter Boltzmanns prinsipp blir da entropien ved $T = 0$

$$S = k \ln W = k \ln(1^N) = 0$$

For høye $T$ kan energidifferensen mellom nivåene neglisjeres, og alle tilstander blir like sannsynlige. Hver partikkel har da

$$g_0+g_1+g_2=1+3+5=9$$

tilstander, og for $N$ uavh. partikler blir det da $W = 9^N$ mikrotilstander. Entropien blir

$$S = k\ln(9^N) = \underline{\underline{Nk\ln 9}} = 2Nk\ln 3 = 2{,}20Nk$$

c) Hastighetsfordelingen vil være en Boltzmannfaktor i den kinetiske energien, dvs

$$F(v) = Ce^{-E/kT} = \underline{\underline{Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}}}}$$

der $C$ er konstant bestemt av normeringen
$(\int F(v)\,d\vec{v} = 1)$

d) Antall partikler som kommer ut av et lite hull i en vegg vil være proporsjonalt med tetthet og hastighet. Den relative andel med hastighet $v$ i et intervall $d\vec{v}$ vil derfor være

$$f(v)\,d\vec{v} = K_1 v F(v)\,d\vec{v}$$

der $K_1$ er normeringskonstant slik at

$$1 = \int f(v)\,d\vec{v} = 4\pi\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$$

(når kulekoordinater benyttes). Eller innsatt



$$1 = K\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2}dv \qquad (\beta = \tfrac{1}{kT})$$

der $K$ er en ny konstant. Kan her innføre ny integrasjonsvariabel

$$u = \tfrac{1}{2}\beta m v^2$$
$$du = \beta m v\,dv$$

som gir

$$1 = K\frac{2}{(\beta m)^2}\int_0^\infty u e^{-u}du = K\frac{2}{(\beta m)^2}\Big|_0^\infty (-u-1)e^{-u} = \frac{2K}{(\beta m)^2}$$

Partikler med energi $E = \frac{1}{2}mv^2 > 2kT = 2/\beta$ betyr $\frac{1}{2}\beta m v^2 = u > 2$ (evt. $v > 2/\sqrt{\beta m}$).
Andel partikler med energi større enn $2kT$ blir følgelig

$$p = K\int_{2/\sqrt{\beta m}}^\infty v^3 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2}dv = K\frac{2}{(\beta m)^2}\int_2^\infty u e^{-u}du$$

$$= 1\cdot\Big|_2^\infty (-u-1)e^{-u} = \underline{\underline{3e^{-2}}} = \underline{\underline{0{,}406}}$$