UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. P.C.Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
VED AVH: F 113 STATISTISK MEKANIKK

Onsdag 16.8.1989
kl.0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator

Oppgave 1 besvares på oppgavearket: oppgave 2 og 3 besvares, som vanlig, på separate ark. Oppgitte formler står tilslutt.

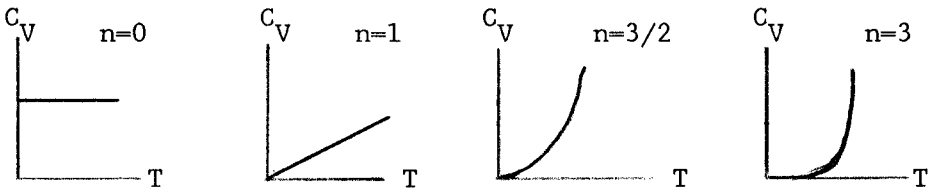
Oppgave 1 Korte spørsmål

Hvert av de 5 spørsmålene teller likt. Besvares ved avkryssing i feltene på selve oppgavearket.

Riktig svar: +4 poeng
Galt svar: −1 poeng
Intet svar: 0 poeng

(Ved mer enn et kryss regnes middelverdien av de avkryssede svar). N poeng totalt tilsvarer tallkarakteren 5 − 0.2N.

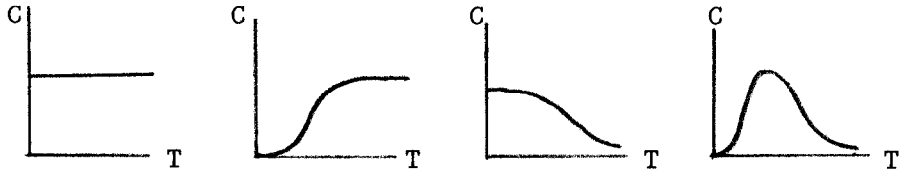
A. For et system av ikke vekselvirkende elektroner er C_V proporsjonal med T^n ved svært lave temperaturer, der n er



noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

B. To ikke identiske fermioner uten vekselvirkning har bare to enpartikkel-tilstander med ulike energier tilgjengelige. Temperaturvariasjonen av systemets varmekapasitet C har følgende kvalitative forløp (kryss av i riktig felt nedenfor):



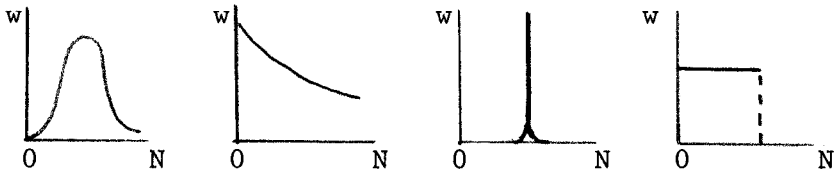
noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

C. Et åpent system av ikke vekselvirkende bosoner har enpartikkelnivåene ϵ_i tilgjengelige, der $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 \ldots$. Det kjemiske potensial μ som regulerer det midlere partikkeltall i systemet tilfredstiller

a) $\mu < \epsilon_1$ ☐ b) $\mu > \epsilon_1$ ☐ c) $\mu < 0$ ☐ d) $\mu > 0$ ☐ e) noe annet ☐

D. Et åpent delvolum (størrelse $1 cm^3$) av en gass befinner seg i tyngdefeltet ved romtemperatur og atmosfæretrykk. Sannsynligheten w(N) for at antall gassmolekyler er N varierer, grovt sett, med N slik (kryss av i riktig felt nedenfor):



noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

E. En gass har tilstandslikningen

$$p = NkTV_0^{-1}\ \ell n(1-V_0/V) \qquad (V>V_0)$$

Den n'te virialkoeffisienten B_n er gitt ved (kryss av)

a) kTV_0^{n-1} ☐

b) $kT\ n^{-1}V_0^{n-1}N^{1-n}$ ☐

c) $n^{-1}(V_0/N)^{n-1}$ ☐

d) $n^{-1}V_0^{n}N^{-n}$ ☐

e) noe annet ☐

<u>Oppgave 2</u>

a) Vis for et system av N partikler med energifunksjonen $H(\vec{r}_1\vec{p}_1,\ldots\vec{r}_N\vec{p}_N)$ kan den indre energi U uttrykkes ved partisjonsfunksjonen Z ved sammenhengen

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ \ell n\ Z\ .$$

b) Et to-atomig gassmolekyl har følgende energifunksjon

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + \phi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\ ,$$

der $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ er impulsene til molekylets to atomer, $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er atomkjernenes posisjoner, m_1 og m_2 er atomenes masser, og

$$\phi(r) = \epsilon\left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r}\right)^2 .$$

Vis at molekylets midlere energi u er gitt ved

$$u = \frac{9}{2}\ kT - \frac{2\epsilon kT}{2\epsilon+kT}\ ,$$

når temperaturen er T .

c) Et mol av en gass består av uavhengige molekyler av ovennevnte type. Beregn gassens varmekapasitet C_V . Skisser kvalitativt temperaturvariasjonen av C_V.

d) Hva er verdien for C_V i de to grensetilfellene $\epsilon \to 0$ og $\epsilon \to \infty$? Kunne du angitt disse verdiene direkte uten å regne ut $u(T)$?

Oppgave 3

a) Anta at enpartikkelnivåene for en gass av N ikke vekselvirkende fermioner ligger svært tett i energiintervallet $(0,\infty)$ og at det er meget nær

$$4\pi(2m/h^2)^{\frac{3}{2}}\, V\, \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon$$

tilstander med energi i intervallet $(\epsilon, \epsilon+d\epsilon)$. Her er m partikkmassen og h Plancks konstant.

Beregn trykket ved det absolutte nullpunkt $T=0$, uttrykt ved de oppgitte størrelser.

b) Energifunksjonen for en klassisk relativistisk gass av ikke-vekselvirkende partikler er

$$H = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{m_0^2\, c^4 + c^2 p_i^2}\ .$$

Benytt den kanoniske fordeling til å beregne tilstandslikningen for N slike partikler i et volum V ved temperaturen T .

c) Vis at tilstandslikningen for en gass av harde kuler er (ved konstant tetthet ρ) proporsjonal med den absolutte temperatur T .

*

OPPGITT (for hele oppgavesettet):

Integraler:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\ ; \qquad \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^{-2}-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\, b^{-3/2}(1+2\sqrt{ab})e^{-\sqrt{4ab}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ; \qquad \int^{+\infty} e^{-ax^{-2}-\, bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}\, e^{-\sqrt{4ab}}$$

Sammenheng mellom trykk p og partisjonsfunksjon Z :

$$p = kT(\partial \ell n Z/\partial V)_T\ .$$