UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor P. C. Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK

Fredag 26. januar 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent kalkulator.

Oppgitte uttrykk står tilslutt.

Oppgave 1

Uavhengige partikler i en gass tiltrekkes mot z-aksen med en kraft proporsjonal med avstanden. Hamiltonfunksjonen for en partikkel er

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \alpha\rho^2$$

der $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ og α er en konstant. Benytt klassisk statistisk mekanikk til å beregne middelavstanden $\langle\rho\rangle$ fra z-aksen i termisk likevekt ved temperaturen T .

Oppgave 2

To vekselvirkende Ising spinn som befinner seg i et ytre magnetfelt $\mathcal{H}$ har energifunksjonen

$$H(s_1,s_2) = -J\ s_1 s_2 - hs_1 - hs_2 \ ,$$

der $h = \mu_0\mu_B\mathcal{H}$ og $s_i=+1$ eller -1. Temperaturen er T . Her er $\mu_B s_i$ det magnetiske moment langs magnetfeltet for spinn nr. i.

a) Vis at systemets totale magnetiske moment er

$$M = 2\mu_B \frac{\sinh(2h/kT)}{\cosh(2h/kT)+e^{-2J/kT}} \ .$$

b) Hva er det totale magnetiske moment i de 3 grensetilfellene $J=0$, $J \to -\infty$ og $J \to +\infty$? Gi en fysisk tolkning av resultatene for hvert av tilfellene.

Oppgave 3

Et åpent system er i kontakt med et partikkelreservoar med kjemisk potensial μ . Temperaturen er T .

a) Sannsynligheten $P(N)$ for å finne N partikler i systemet kan uttrykkes ved de kanoniske og store kanoniske partisjonsfunksjonene som

$$P(N) = \frac{1}{\Xi} e^{\mu\beta N} Z(N) ,$$

der $\beta = 1/kT$.

Angi et uttrykk for Ξ når μ og $Z(N)$ antas kjente. Vis at det midlere partikkeltall $\langle N \rangle$ er gitt ved

$$\langle N \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi .$$

b) Et energinivå i en halvleder er dobbelt degenerert, og de to énpartikkeltilstandene nummereres 1 og 2. I halvlederen er tilstede elektroner med kjemisk potensial (Ferminivå) μ . Temperaturen er T. Energien for systemet er

$$H(n_1, n_2) = (n_1+n_2)\epsilon + Un_1n_2 ,$$

der $n_i = 0$ eller 1 er antall partikler i énpartikkeltilstand nr. i.

$U > 0$ representerer en ekstra energiomkostning (pga Coulombfrastøtningen) ved å ha to elektroner i dette energinivået. Vis at den store kanoniske partisjonsfunksjonen for dette energinivået er gitt ved

$$\Xi(\mu, T) = 1 + 2e^{(\mu-\epsilon)\beta} + e^{2(\mu-\epsilon)\beta - U\beta} .$$

c) Beregn det midlere antall elektroner $\langle N \rangle$ for energinivået i punkt b).

Beregn $\langle N \rangle$ i grensen der frastøtningen er svært stor, d.v.s. $U \gg kT$.

Hva blir (fremdeles for $U \gg kT$) $\langle N \rangle$ når det kjemiske potensial (Ferminivået) faller sammen med energinivået, d.v.s. $\mu = \epsilon$?

Oppgave 4

To identiske spinn 0 partikler uten vekselvirkning har to énpartikkel-energinivåer $\epsilon_1 = 0$ og $\epsilon_2 = \epsilon > 0$ tilgjengelig, med degenerasjonsgrader $g_1 = 1$ (ikke degenerert) og $g_2 = g$, ialt $g+1$ énpartikkeltilstander. Beregn systemets midlere energi $\langle E \rangle$ når temperaturen er T .

OPPGITT (for hele oppgavesettet):

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2 & \text{for } n=0 \\ 1/2 & \text{for } n=1 \\ \sqrt{\pi}/4 & \text{for } n=2 \end{cases}$$

$\mu_B = e\hbar/2m$ = en Bohrmagneton

k = Boltzmanns konstant.