

## LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

$$\langle \rho \rangle = \frac{\iint \rho e^{-\alpha p^2 \beta} dx dy}{\iint e^{-\alpha p^2 \beta} dx dy} = \frac{\int_0^\infty \rho e^{-\alpha p^2 \beta} 2\pi p dp}{\int_0^\infty e^{-\alpha p^2 \beta} 2\pi p dp} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \beta}} \frac{\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx}{\int_0^\infty x e^{-x^2} dx} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha \beta}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}/4}{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi k T}{\alpha}}}}$$

Oppgave 2

- a) Fire tilstande:  $\uparrow\uparrow$  energi =  $-J-2h$ , magn. moment  $2\mu_B$   
 $\uparrow\downarrow \text{og } \downarrow\uparrow$  - " =  $J$ , - " - 0  
 $\downarrow\downarrow$  - " - =  $-J+2h$ , - " -  $-2\mu_B$

Totalt magnetisk moment er middelverdien av mikrotilstandenes magnetiske moment:

$$M = \frac{2\mu_B e^{(J+2h)\beta} - 2\mu_B e^{(J-2h)\beta}}{e^{(J+2h)\beta} + 2e^{-J\beta} + e^{(J-2h)\beta}} = 2\mu_B \frac{e^{2h\beta} - e^{-2h\beta}}{e^{2h\beta} + e^{-2h\beta} + 2e^{-2J\beta}}$$

$$= 2\mu_B \frac{\sinh(2h/kT)}{\cosh(2h/kT) + e^{-2J/kT}}$$

Vi har brukt at sannsynligheten for en mikrotilstand er  $e^{-H(s_1, s_2)\beta} / \sum_{s_1, s_2} e^{-H(s_1, s_2)\beta}$ . En alternativ utledning bruker partisjonsfunksjonen  $Z$  og  $M = \mu_B \frac{\partial}{\partial h} \ln Z$ .

b)  $J=0$  gir  $M = 2\mu_B \frac{\sinh 2h\beta}{\cosh 2h\beta + 1} = \underline{\underline{\frac{2\mu_B \tanh \beta h}{\cosh 2h\beta + 1}}}$ ,

venn  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ ,  $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$ .

$J \rightarrow -\infty$  gir  $M = 0$

$J \rightarrow +\infty$  gir  $M = \underline{\underline{2\mu_B \tanh \beta h}}$

## Fysiske tydning:

(2)

- (i) Når  $J = -\infty$  er spinnene låst til hverandre i antiferromagnetisk kopling. De peker hver sin veg, og gir derfor  $M=0$
- (ii) Når  $J=0$  er spinneene ukoplet, og  $M$  blir som to ideelle paramagnetiske singel spin, hver med magnetisk moment  $\mu_B$ .
- (iii) Når  $J=+\infty$  er spinneene låst til hverandre med parallel innretning.  $M$  blir derfor som for ett eneste spinn i magnetfelt, med magnetisk moment  $2\mu_B$ .

## Opgave 3

a) Av  $\sum_{N=0}^{\infty} P(N) = 1$  følger  $\underline{\Sigma} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu \beta N} Z(N)$

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} N P(N) = \frac{1}{\Sigma} \sum_{N=0}^{\infty} N e^{\mu \beta N} Z(N) = \frac{1}{\Sigma} kT \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{N=0}^{\infty} Z(N) e^{\mu \beta N} \\ &= \frac{kT}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} = \underline{\underline{\frac{kT}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Sigma}} \end{aligned}$$

b) Systemet kan ha 0, 1, 2 partikler, ialt 4 stk topartikkeltilstander.

$$N=0 \quad Z(0) = e^{-\beta H(0,0)} = 1$$

$$N=1 \quad Z(1) = e^{-\beta H(1,0)} + e^{-\beta H(0,1)} = 2e^{-\beta \epsilon}.$$

$$N=2 \quad Z(2) = e^{-\beta H(1,1)} = e^{-2\beta \epsilon} - \beta U$$

Det gir  $\underline{\Sigma} = \sum_N e^{\mu \beta N} Z(N) = \underline{\underline{1 + 2e^{(\mu-\epsilon)\beta} + e^{2(\mu-\epsilon)\beta} - \beta U}}$

$$c) \langle N \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z = \frac{2e^{(\mu-\epsilon)\beta} + 2e^{2(\mu-\epsilon)\beta - \beta U}}{1 + 2e^{(\mu-\epsilon)\beta} + e^{2(\mu-\epsilon)\beta - \beta U}}$$

$U \gg kT \Rightarrow e^{-\beta U} \ll 1$ . Til laveste orden settes  $e^{-\beta U} \approx 0$ :

$$\langle N \rangle = \frac{2e^{(\mu-\epsilon)\beta}}{1 + 2e^{(\mu-\epsilon)\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

For  $\mu = \epsilon$  blir  $\langle N \rangle = \frac{2}{3}$

[Oppgavestillerens kommentar: Dette er relevant for donor-nivåer i halvledere, Ashcroft & Mermin likn. (28.31)]

#### Oppgave 4

Spinn 0 partikler er bosoner, og med 2 partikler kan besettsstallene for hver tilstand (enpartikkeltilstand) være 0, 1 eller 2.

- Begge i grunntilstanden: Energi = 0, deg. grad 1
- En i grunntilstanden, en i eksitedt nivå: Energi =  $\epsilon$ , og det er  $g$  distinkte muligheter.
- Begge i det eksitede nivå. Energien er  $2\epsilon$ , og antall ulike topartikkeltilstander er lik antall måter å plassere 2 identiske partikler i  $g$  bokser. Det blir  $g$  måter når de plasseres i samme boks (nivå), og  $\frac{g(g-1)}{2}$  når de plasseres i ulike nivå, ialt  $\frac{1}{2}g(g+1)$  måter.

(4)

Partisjonsfunksjonen blir  $Z = \sum_{\text{alle 2-partikkel tilstander}} e^{-\beta E_n}$ :

$$Z = 1 + g e^{-\beta \epsilon} + \frac{1}{2} g(g+1) e^{-2\beta \epsilon}$$

Den midlere energi

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{g e^{-\beta \epsilon} + g(g+1) e^{-2\beta \epsilon}}{\underbrace{1 + g e^{-\beta \epsilon} + \frac{1}{2} g(g+1) e^{-2\beta \epsilon}}, \epsilon}$$

med  $\beta = 1/kT$ .