UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Johan S. Høye.
Tlf. 93654

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
Lørdag 12. august 1995
kl.0900 –1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematishe Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator.

Oppgave 1

a) Et Ising spin system i ytre magnetfelt $\mathscr{H}$ har energi

$$H = -h \sum_{i=1}^{N} s_i + U(s_i, \ldots, s_N)$$

der $s_i = \pm 1$, $h = \mu_0 \mu_B \mathscr{H}$, μ_0 er permittivitet i vakuum og μ_B er Bohr–magneton. For et system bestående av et stort antall N slike vekselvirkende spinn på et regulært gitter i likevekt med temperatur T gjelder fluktuasjonsteoremet

$$\frac{\partial m}{\partial h} = a \sum_j \Gamma_{ij}$$

der $m = \langle s_i \rangle$ og $\Gamma_{ij} = \langle (s_i - m)(s_j - m) \rangle$.

Vis dette teoremet, og bestem størrelsen a . [Hint: Sett opp partisjonsfunksjonen og deriver.]

b) Den endimensjonale Ising–modellen med nærmeste nabo vekselvirkning $-J\, s_i s_j$ har tilstandslikningen

$$m = \frac{\sinh(\beta h)}{(\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J})^{\frac{1}{2}}}$$

Spinnkorrelasjonsfunksjonen til denne modellen er av formen

$$\Gamma_{ij} = c\, u^{|n|} \qquad \text{med } n = i-j$$

der n er heltall. Bestem størrelsene c og u for $h = 0$, når resultatet fra pkt. a) og verdien til $\Gamma_{ii} = \langle (s_i - m)^2 \rangle$ benyttes.

[Hint: Bestem først Γ_{ii}.]

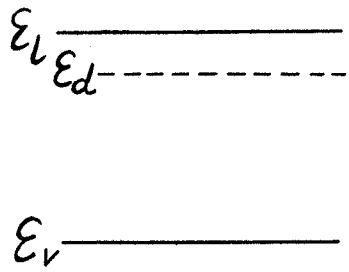
Oppgave 2

Beregn på en konstant (uavhengig av V og T) nær, den kanoniske partisjonsfunksjonen for N like klassiske ikke–vekselvirkende partikler med masse m i et volum V når temperaturen er T. Beregn systemets indre energi U og bestem tilstandslikningen (trykket).

Oppgitt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, $\quad \beta p = \frac{\partial}{\partial V} \ln Z$.

Oppgave 3

a)



I en halvleder er tilstandstettheten for energien til elektronene gitt ved

$$g(\epsilon) = \begin{cases} VA_\ell(\epsilon - \epsilon_\ell)^{\frac{1}{2}} & \epsilon > \epsilon_\ell \\ 0 & \epsilon_v < \epsilon < \epsilon_\ell \\ VA_v(\epsilon_v - \epsilon)^{\frac{1}{2}} & \epsilon < \epsilon_v \end{cases}$$

der A_ℓ og A_v er størrelser som ikke avhenger av energien ϵ, og V er volumet. Anta nå at tettheten av elektroner i ledningsbåndet er lav, og vis at med denne forutsetningen er tettheten (antall pr. volumenhet) av elektroner

i ledningsbåndet gitt ved et uttrykk av formen

$$n = n_0 e^{(\mu - \epsilon_\ell)/kT}$$

der μ er det kjemiske potensialet. I størrelsen n_0 vil det inngå et integral, men det kreves ikke at den numeriske verdien av dette integralet bestemmes. Størrelsen n_0 vil avhenge av temperaturen T slik at $n_0 \propto T^\alpha$. Bestem eksponenten α.

b) Ved doping av halvlederen tilføres donornivåer med energi ϵ_d der tettheten av kvantetilstander er n_{0d}. Ved $T = 0$ er alle donornivåene fylt med elektroner mens ledningsbåndet er tomt. For $T > 0$ vil disse elektronene delvis gå over i ledningsbåndet, og en ønsker å bestemme tettheten av elektroner n i ledningsbåndet. Hva blir n når en antar $n_{0d} << n_0$ slik at uttrykket fra punkt a) kan benyttes for ledningsbåndet ved at n_0 (men ikke μ) anses for kjent. Det antas her videre at alle elektronene i ledningsbåndet kommer fra donornivåene. (Dvs. eksitasjon av elektroner fra valensbåndet neglisjeres.)

Oppgitt: Fermifordelingen $f(\epsilon) = \dfrac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu-\epsilon)}}$.