NTNU
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Johan S. Høye.
Tlf. 93654

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
Onsdag 10. januar 1996
kl.0900 –1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematishe Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator.

Oppgave 1

a) N ikke–vekselvirkende spinn som befinner seg i et magnetfelt $\mathscr{H}$ har energifunksjonen

$$H = -h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

der $h = \mu_0 \mu_B \mathscr{H}$ og $s_i = +1$ eller -1. Temperaturen er T. Her er $\mu_B s_i$ det magnetiske moment for spinn i. Bestem systemets midlere magnetiske moment $M = \mu_B \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle$ i termisk likevekt.

Hva blir systemets midlere energi $\langle H \rangle$?

b) En partikkel befinner seg i et tre–dimensjonalt potensial med energifunksjon

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + ar^3$$

der $p = |\vec{p}|$, $r = |\vec{r}|$ og a er en konstant. Hva er midlere kinetisk energi til dette systemet ved en gitt temperatur T ut fra ekvipartisjonsprinsippet? Beregn midlere potensiell energi for partikkelen.

Oppgave 2

a) Skisser kvalitativt hvordan varmekapasiteten ved konstant volum C_V til en gass bestående av diatomiske molekyl varierer med temperaturen. Gjør kort rede for de ulike bidragene til C_V.

b) To atomer X og Y har kjernespinn henholdsvis $S_X = 0$ og $S_Y = \frac{1}{2}$. Disse atomene kan danne de diatomiske molekylene X_2, XY og Y_2. Ved rotasjon av molekylene oppstår kvantemekaniske rotasjonsnivåer for energien. Symmetrikrav når identiske partikler opptrer i samme molekyl vil legge begrensninger på hvilke rotasjonsnivåer som er tilstede. Gjør kort rede for hvilke verdier av ℓ–kvantetallet for den totale dreieimpulsen som opptrer for henholdsvis X_2, XY og Y_2 molekylet. Dvs. bestem hvordan odde og like verdier av ℓ vektlegges (bortsett fra Boltzmannfaktoren) for hvert av de 3 molekylene.

[Hint: X atomkjernen er boson mens Y atomkjernen er fermion (som H atomkjernen). X_2 molekylet har bare én kjernespinntilstand med resulterende spinn 0, dvs. spinnbølgefunksjonen faller bort (spinnløs partikkel).]

Oppgitt: $E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ \ell(\ell+1)$.

Oppgave 3

a) For ikke–vekselvirkende bosoner er sammenhengen mellom bølgetallvektor $\vec{k}$ og energien til de kvantiserte enpartikkeltilstandene ϵ gitt ved $\epsilon = \hbar^2 k^2/2m$. Med vekselvirkning tilstede kan fremdeles bildet med uavhengige bosoner brukes som en tilnærmelse, men sammenhengen mellom ϵ og k blir en annen. Dermed endres også uttrykket for tettheten av tilstander (antall tilstander pr. energienhet) $g(\epsilon)$. Forøvrig er det ingen endringer ved beregningene (sammenliknet med de for ikke–vekselvirkende partikler) som er aktuelle i denne oppgaven. For ^{4}He har en at $\epsilon = \text{konst.} \cdot k$ for små k, og dette innebærer at $g(\epsilon)$ blir et uttrykk på formen

$$g(\epsilon) = VC\epsilon^2 \qquad (\text{for } \epsilon \geq 0)$$

der V er volumet og C er en størrelse uavhengig av V og ϵ.
De vekselvirkende bosonene beskrevet ovenfor vil foreta en Bose–Einstein kondensasjon ved en temperatur T_λ.

Hva er verdien på det kjemiske potensialet μ når $T \leq T_\lambda$?

Anta nå til forenkling at det ovenfor gitte uttrykket for $g(\epsilon)$ kan benyttes for alle ϵ. Sett så opp uttrykket for tettheten av partikler $\rho = \langle N \rangle / V$ der $\langle N \rangle$ er midlere antall partikler , og bestem sammenhengen mellom ρ og T_λ.

b) Sett så opp uttrykket for den indre energi U til bosonene, og bestem denne for en temperatur $T \leq T_\lambda$.

Vis at for $T < T_\lambda$ kan varmekapasiteten C_V skrives som

$$C_V = A\, k \langle N \rangle \left(\frac{T}{T_\lambda}\right)^q$$

der koeffisienten A og eksponenten q skal bestemmes. (Her er k Boltzmanns konstant.)

[Hint: Uttrykk størrelser som opptrer i denne oppgaven ved hjelp av Riemanns ζ–funksjon oppgitt nedenfor.]

Oppgitt: $$\zeta(n+1) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{x^n\, dx}{e^x - 1}$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} .$$