NTNU
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Johan S. Høye.
Tlf. 93654

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
Lørdag 18. januar 1997
kl.0900 –1300

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: Mathematishe Formelsammlung
Rotmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator.

Oppgave 1

a) Betrakt den éndimensjonale Ising–modellen i null ytre magnetfelt og der bare nærmeste nabopar av spinn vekselvirker. Energifunksjonen er da

$$V = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} .$$

Her er $J$ vekselvirkningskonstanten, $s_i = \pm 1$ er spinnet på posisjon $i$ og $N$ er antall spinn. Spinnkorrelasjonsfunksjonen er gitt ved

$$\Gamma_{ij} = \langle s_i s_j \rangle .$$

Hva er verdien til $\Gamma_{ii}$ , og hva er sammenhengen mellom $\Gamma_{ij}$ og $\Gamma_{ji}$ $(i \neq j)$?

b) Beregn $\Gamma_{ij}$ $(j>i)$ for denne Isingmodellen i termisk likevekt .

[Hint: Sett opp uttrykket for $\langle s_i s_j \rangle$ og summer suksessivt med hensyn på $s_1$ , $s_2$ , $s_3$, ..., $s_N$ i teller og nevner hver for seg.]

c) Hva er midlere energi $U$ uttrykt ved $\Gamma_{ij}$ og den gitte energifunksjonen?

Bestem $U$ ved å sette inn resultatet for $\Gamma_{ij}$.

Oppgave 2

a) En klassisk partikkel kan bevege seg på en kuleflate med radius R. Det virker en kraft F i z–retningen slik at partikkelen har en potensiell energi

$$V = V(\theta,\phi) = -FR\cos\theta$$

der $\theta$ og $\phi$ er standard kuleflatevinkler.
Hva er partikkelens midlere kinetiske energi $U_k$ i termisk likevekt når temperaturen er T og en benytter ekvipartisjonsprinsippet på den 2–dimensjonale bevegelsen på kuleflaten. (Dvs. lokalt betraktes kuleflaten som et lite plan der partikkelen beveger seg.)

b) Hva er midlere potensiell energi $U_p$ i termisk likevekt? [Hint: Benytt romvinkel–elementet $d\Omega = \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta\, d\theta d\phi$ ved integrasjon over kuleflaten.]

c) Beregn den spesifikke varmen C for partikkelen. Hva blir C når $T \to \infty$ og når $T \to 0$ ? Hvordan kan en innse disse 2 siste resultatene ved direkte betraktning?

Oppgave 3

a) For et mangepartikkelsystem bestående av ikke–vekselvirkende bosoner eller fermioner gjøres statistisk–mekaniske beregninger på grunnlag av énpartikkeltilstandene. Hva er antall mulige partikler i de enkelte énpartikkel–tilstandene for henholdsvis bosoner og fermioner?
Hva er sannsynligheten $p_0$ for at en énpartikkeltilstand med energi $\epsilon$ ikke er besatt (dvs. ingen partikler i tilstanden) i et system bestående av bosoner med kjemisk potensial $\mu$ ved temperaturen T ?

b) Et system bestående av 2 fermioner har 4 énpartikkeltilstander tilgjengelig. Energiene til disse énpartikkeltilstandene er henholdsvis

$$E = -\epsilon\,,\ 0\,,\ 0 \text{ og } \epsilon$$

(dvs. to av disse 4 tilstandene har begge energien 0).
Med disse énpartikkeltilstandene vil systemet bestående av 2 fermioner få ialt 6 tilstander. Bestem disse 6 tilstandene og den tilhørende energien til hver av dem. Beregn så systemets midlere energi U i termisk likevekt ved en gitt temperatur.

c) Systemet under punkt b) bestående av 4 énpartikkeltilstander blir nå satt i kontakt med et partikkelreservoar slik at midlere antall partikler (fermioner) i systemet er lik 2 (dvs. partikkeltallet kan variere om middelverdien 2). Vis at med denne middelverdien 2 er det kjemiske potensialet $\mu = 0$ , og bestem så systemets midlere energi U for denne situasjonen.

Oppgitt: $f(\epsilon) = \frac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1 \pm e^{\beta(\mu-\epsilon)}}$ .